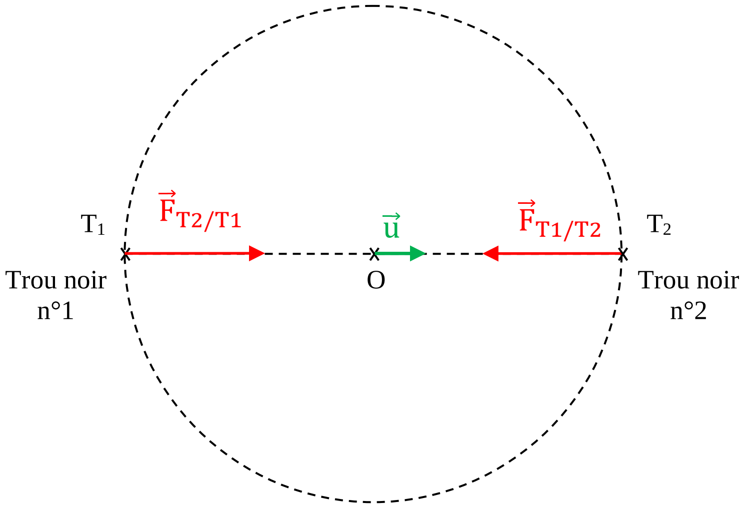
Correction de l'ex. n° 5 : Fusion de 2 trous noirs

1.



$$F_{T2/T1} = F_{T1/T2} = \frac{G \times m \times m}{(2r)^2} = \frac{Gm^2}{4r^2}$$

2.

- système : {trou noir n°2}
  référentiel : référentiel associé à un repère de centre O et dont les 3 axes sont orientés vers des étoiles lointaines, considérées fixes. Comme indiqué dans l'énoncé, ce référentiel est considéré galiléen.

- bilan des forces extérieures appliquées au système :

  force gravitationnelle exercée par le trou noir n°1 sur le trou noir n°2 : $\vec{F}_{T1/T2} = -\frac{Gm^2}{4r^2}\,\vec{u}$

  On néglige les forces gravitationnelles dues aux autres astres

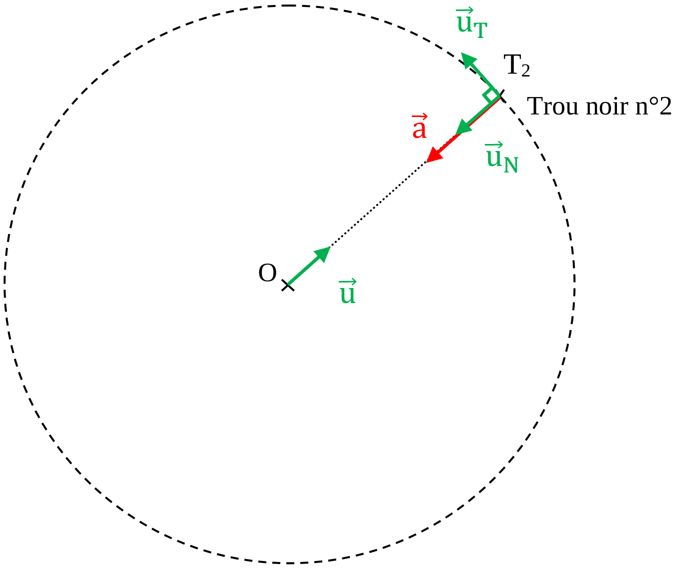
- D'après la 2ème loi de Newton, $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$

  car le référentiel d'étude est considéré galiléen et que la masse du système est constante.

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{T1/T2} = m\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\,\vec{a} = -\frac{Gm^2}{4r^2}\,\vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{Gm}{4r^2}\,\vec{u}$$

- Introduisons le repère de Frénet $(T_2, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$:



$\vec{u}_N = -\vec{u}$

$\vec{u}_{TS}$

$$\vec{u}_N = -\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{Gm}{4r^2}\,\vec{u}_N$$

Or dans le cas d'un point ayant un mouvement circulaire de rayon r , $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + \dfrac{v^2}{r}\,\vec{u}_N$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = 0 & \textit{(1)} \\[2ex] \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{Gm}{4r^2} & \textit{(2)} \end{cases}$$

(1) : $\dfrac{dv}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$ v est constante : le mouvement est uniforme

(2) $\Rightarrow \quad v^2 = \dfrac{Gm}{4r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\dfrac{Gm}{4r}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{Gm}{r}}$

En raisonnant de même avec le trou noir n°1, on obtiendrait un résultat similaire.

Ainsi, chaque trou noir a un mouvement circulaire uniforme et la valeur de sa vitesse est :

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gm}{r}}$$

3. La période de révolution T de chaque trou noir est la durée qu'il faut pour qu'il effectue un tour sur sa trajectoire.

Chaque trou noir parcourt, à vitesse constante, la distance $\ell = 2\pi r$ pendant une durée $\Delta t = T$.

$$\Rightarrow \quad v = \frac{\ell}{T} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gm}{r}}} = 4\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm}}$$

$$\Rightarrow \quad T^2 = \frac{16\pi^2 r^3}{Gm}$$

$$\Rightarrow \quad r^3 = \frac{Gm}{16\pi^2} \times T^2$$

4. D'après les données, la période des ondes gravitationnelles est égale à la demi-période de révolution des trous noirs : $T_{ondes} = \frac{T}{2}$

$$\Rightarrow \quad T_{ondes} = \frac{1}{2} \times 4\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm}}$$

La fréquence des ondes gravitationnelles est donc :

$$f_{ondes} = \frac{1}{T_{ondes}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Gm}{r^3}}$$

Quand les deux trous noirs se rapprochent, r diminue. Donc comme G et m sont constantes, on en déduit que la fréquence des ondes gravitationnelles augmente.

5. Calculons la valeur de la vitesse de chaque trou noir à l'aide du modèle de la mécanique newtonienne utilisé dans les questions 2.2. et 2.3.

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gm}{r}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G \times 30M_S}{r}}$$

Or $r^3 = \frac{Gm}{16\pi^2} \times T^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{Gm}{16\pi^2} \times T^2} = \sqrt[3]{\frac{G \times 30M_S}{16\pi^2 f^2}}$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 30 \times 2{,}00 \times 10^{30}}{16\pi^2 \times 75^2}} = 1{,}7\times10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

On obtient donc :

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times30\times2{,}00\times10^{30}}{1{,}7\times10^{5}}} = 7{,}8\times10^{7}\ \text{m.s}^{-1}$$

Comparons cette valeur à celle obtenue en tenant compte de la théorie de la relativité générale

$$v_{\text{rel.gén.}} = \frac{c}{4} = \frac{3{,}00\times10^{8}}{4} = 7{,}5\times10^{7}\ \text{m.s}^{-1}$$

L'écart relatif vaut :

$$e_R = \left|\frac{v - v_{\text{rel.gén.}}}{v_{\text{rel.gén.}}}\right| = \left|\frac{7{,}8\times10^{7} - 7{,}5\times10^{7}}{7{,}5\times10^{7}}\right| = 0{,}04 = 4\ \%$$

La valeur obtenue est donc assez proche de celle obtenue en tenant compte de la relativité générale. Ainsi, dans ce cas, les lois de la mécanique newtonienne donnent une bonne approximation de la vitesse des trous noirs.