

Ex. n° 10 : Feu d'artifice
(d'après Bac S, Métropole 2017)

Pour obtenir un feu d'artifice qui produit son, lumière et fumée, on procède à l'éclatement d'une pièce pyrotechnique. Bien que produisant des effets différents, toutes ces pièces sont conçues selon le même principe. Un dispositif permet de projeter la pièce pyrotechnique vers le haut. Une fois que ce projectile a atteint la hauteur prévue par l'artificier, il éclate, créant l'effet « son et lumière » souhaité.

Le but de cet exercice est d'étudier la trajectoire du projectile.

Les caractéristiques de deux pièces pyrotechniques nommées « crackling R100 » et « marron d'air » sont consignées dans le tableau ci-dessous :

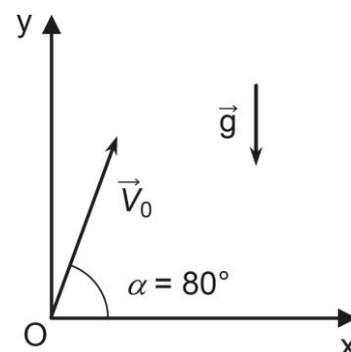
Caractéristiques constructeur	Crackling R100	Marron d'air
Masse	$2,8 \times 10^2$ g	40 g
Vitesse initiale	250 km.h ⁻¹	200 km.h ⁻¹
Hauteur atteinte à l'éclatement	120 m	70 m
Durée entre la mise à feu et l'éclatement	3,2 s	2,5 s
Distance de sécurité recommandée	130 m	95 m

Donnée : valeur du champ de pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

I. Étude des trajectoires des pièces pyrotechniques

On s'intéresse au mouvement de la pièce pyrotechnique jusqu'à son éclatement dans un référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère (Ox, Oy). On étudie le mouvement du centre d'inertie G de la pièce « crackling R100 ». On prend l'instant du lancement comme origine des temps $t = 0$ s.

À cet instant, le vecteur vitesse initiale \vec{V}_0 de G fait un angle $\alpha = 80^\circ$ par rapport à l'horizontale (schéma ci-contre).



1. Donner les expressions littérales des coordonnées du vecteur \vec{V}_0 en fonction de V_0 et α .
2. Montrer que, si on néglige toute action de l'air, le vecteur accélération de G noté \vec{a}_G est égal au vecteur champ de pesanteur \vec{g} dès que le projectile est lancé.
3. Montrer alors que les équations horaires du mouvement de G sont :
 $x_G(t) = 12,1 t$ et $y_G(t) = -4,91 t^2 + 68,4 t$ en exprimant $x_G(t)$ et $y_G(t)$ en mètres et le temps « t » en secondes.
4. Dans le cadre de ce modèle, déterminer, à l'aide des équations horaires, l'altitude théorique atteinte par le projectile à $t = 3,2$ s.
5. Sachant que l'éclatement se produit lors de la montée, expliquer l'écart entre cette valeur et celle annoncée par le constructeur.

II. Le « marron d'air »

Au début et à la fin de chaque feu d'artifice, les artificiers utilisent une pièce pyrotechnique appelée « marron d'air » pour obtenir une détonation brève et puissante. Désireux de l'envoyer le plus haut possible, ils effectuent un tir vertical avec une vitesse initiale v_i . Par la suite, on suppose que la pièce n'éclate pas avant d'atteindre sa hauteur maximale h .

1. Dans l'hypothèse où l'énergie mécanique de la pièce pyrotechnique se conserve, montrer que la hauteur maximale h atteinte par cette pièce est donnée par la relation :

$$h = \frac{v_i^2}{2g}$$

2. Déterminer la valeur de la hauteur maximale atteinte h .