Correction de l'ex. n° 10 : Feu d'artifice

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

I. Étude des trajectoires des pièces pyrotechniques

1. $\vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{array} \right.$

2.

- système : {pièce "crackling R100", de masse m}
  référentiel : terrestre, considéré galiléen

- bilan des forces extérieures appliquées au système :
  $\vec{P}$ son poids
  L'action de l'air est négligée dans cette étude.

- D'après la 2ème loi de Newton, $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$
  car le référentiel d'étude est considéré galiléen et que la masse du système est constante.
  $\Rightarrow \vec{P} = m\vec{a}_G$
  $\Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a}_G$
  $\Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$

- $\vec{a}_G \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \end{array} \right. = \vec{g} \left| \begin{array}{l} 0 \\ -g \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_G \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right.$

3.

- $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}_G}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_G \left| \begin{array}{l} v_x = C_1 \\ v_y = -gt + C_2 \end{array} \right.$

Or $\vec{v}_G$ (t=0 s) $\begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix} = \vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = v_0 \cos\alpha \\ C_2 = v_0 \sin\alpha \end{cases}$

Donc $\vec{v}_G$ (t) $\begin{vmatrix} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin\alpha \end{vmatrix}$

- $\vec{v}_G = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \Rightarrow \overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x = (v_0 \cos\alpha)\, t + C_3 \\ y = -\dfrac{1}{2} gt^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t + C_4 \end{vmatrix}$

Or $\overrightarrow{OG}$ (t=0 s) $\begin{vmatrix} C_3 \\ C_4 \end{vmatrix} = \overrightarrow{OG}_0 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases}$

Donc $\overrightarrow{OG}$ (t) $\begin{vmatrix} x_G = (v_0 \cos\alpha)\, t \\ y_G = -\dfrac{1}{2} gt^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t \end{vmatrix}$

Or $v_0 = 250 \text{ km.h}^{-1} = \dfrac{250}{3{,}6} \text{ m.s}^{-1} = 69{,}4 \text{ m.s}^{-1}$

On en déduit que :

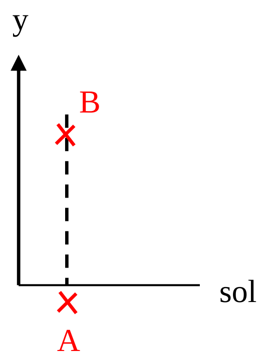
$$\begin{cases} x_G = (69{,}4 \times \cos 80°) \times t = 12{,}1\, t \\ y_G = -\dfrac{1}{2} \times 9{,}81 \times t^2 + (69{,}4 \times \sin 80°) \times t = -4{,}91\, t^2 + 68{,}4\, t \end{cases}$$

avec t en s
et x_G et y_G en m

4. D'après les équations horaires du mouvement, l'altitude théorique atteinte par le projectile à t = 3,2 s est :
$y_G(t = 3{,}2\text{s}) = -4{,}91 \times 3{,}2^2 + 68{,}4 \times 3{,}2 = 169$ m

5. Cette valeur (169 m) est différente de celle indiquée par le constructeur (120 m) car dans notre étude, il n'a pas été tenu compte des frottements de l'air, qui ne sont pas négligeables ici.

II. Le « marron d'air »



1. Notons A la position du "marron d'air" au départ (au niveau du sol), et B sa position quand il atteint son altitude maximale.

- Si l'énergie mécanique se conservait, on aurait donc :
  $E_m(B) = E_m(A)$ *(1)*

- Déterminons les expressions de $E_m(B)$ et $E_m(A)$.
  On choisit $E_{pp} = 0$ J pour $y = 0$ m.

  $E_m(A) = E_c(A) + E_p(A)$

  Or $E_c(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_i^2$ et $E_p(A) = E_{pp}(A) = 0$ J

  Donc $E_m(A) = \frac{1}{2} m v_i^2$

  $E_m(B) = E_c(B) + E_p(B)$

  Or $E_c(B) = \frac{1}{2} m v_B^2 = 0$ J car $v_B = 0$ m.s^{-1}

  et $E_p(B) = E_{pp}(B) = mgy_B = mgh$

  Donc $E_m(B) = mgh$

- En remplaçant $E_m(B)$ et $E_m(A)$ par leurs expressions dans l'équation (1), on obtient : $mgh = \frac{1}{2} m v_i^2$

  c'est-à-dire : $h = \frac{v_i^2}{2g}$

2. $v_i = 200$ km.h^{-1} $= \frac{200}{3,6}$ m.s^{-1} $= 55,6$ m.s^{-1}

donc : $h = \frac{55,6^2}{2 \times 9,81} = 157$ m