Correction des questions I.1 à I.4 du sujet
Polytechnique - 2009 - MP - Physique

Réalisée par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie
© *http://b.louchart.free.fr*

1. La charge volumique vaut $\rho = n_i \times q_{ion} + n_e \times q_{électron} = n_i \times pe + n_e \times (-e)$

Or le milieu est globalement neutre $\Rightarrow \rho = 0$

$\Rightarrow n_i pe - n_e e = 0$

$\Rightarrow n_i p = n_e$

2. Si, comme l'indique l'énoncé, on néglige les interactions entre les particules et l'action du champ magnétique, on obtient, d'après la relation fondamentale de la dynamique :

- pour un ion de masse m_i, $m_i \dfrac{d\vec{v}_i}{dt} = pe\vec{E}$ *(1)*
- pour un électron de masse m_e, $m_e \dfrac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$ *(2)*

L'accélération des ions et des électrons a lieu dans la direction du champ $\vec{E}$, donc selon l'axe (Ox). Comme leur vitesse initiale est nulle, leur mouvement est donc aussi selon l'axe (Ox), perpendiculairement à $\vec{k}$ qui, lui, est dirigé selon l'axe (Oz).

3. On peut déduire des équations précédentes les expressions de $\vec{v}_i$ et $\vec{v}_e$ en régime permanent, en utilisant la notation complexe :

$$(1) \Rightarrow m_i i\omega \vec{v}_i = pe\vec{E} \Rightarrow \vec{v}_i = \frac{pe}{i m_i \omega}\vec{E} = -i\frac{pe}{m_i\omega}\vec{E}$$

$$(2) \Rightarrow m_e i\omega \vec{v}_e = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{v}_e = -\frac{e}{i m_e \omega}\vec{E} = i\frac{e}{m_e\omega}\vec{E}$$

Le vecteur densité de courant est donc :

$$\vec{j} = n_i pe\,\vec{v}_i + n_e(-e)\,\vec{v}_e = n_e e(\vec{v}_i - \vec{v}_e) = n_e e\left(-i\frac{pe}{m_i\omega}\vec{E} - i\frac{e}{m_e\omega}\vec{E}\right)$$

c'est-à-dire : $\vec{j} = -i\dfrac{n_e e^2}{\omega}\left(\dfrac{p}{m_i} + \dfrac{1}{m_e}\right)\vec{E}$

Mais la masse d'un ion étant beaucoup plus grande que celle d'un électron et p étant un entier naturel de valeur peu élevée, $\frac{p}{m_i} << \frac{1}{m_e}$

Donc finalement, on obtient $\vec{j} = -i \frac{n_e e^2}{m_e \omega} \vec{E}$

Ainsi, en pratique, on peut considérer que seuls les électrons contribuent au courant dans le plasma.

4. Dans le plasma globalement neutre ($\rho = 0$), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\, \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

Or $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0 - \Delta \vec{E}$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

En passant en notations complexes, on obtient :

$$-k^2 \vec{E} = \mu_0 i\omega \vec{j} + \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \vec{E}$$

$$\Rightarrow -k^2 \vec{E} = \mu_0 i\omega \left(-i \frac{n_e e^2}{m_e \omega}\right) \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

$$\Rightarrow -k^2 = \frac{\mu_0 n_e e^2}{m_e} - \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_e e^2}{m_e}$$

Or $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \Rightarrow \omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \Rightarrow \frac{\mu_0 n_e e^2}{m_e} = \varepsilon_0 \mu_0 \omega_p^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2}$

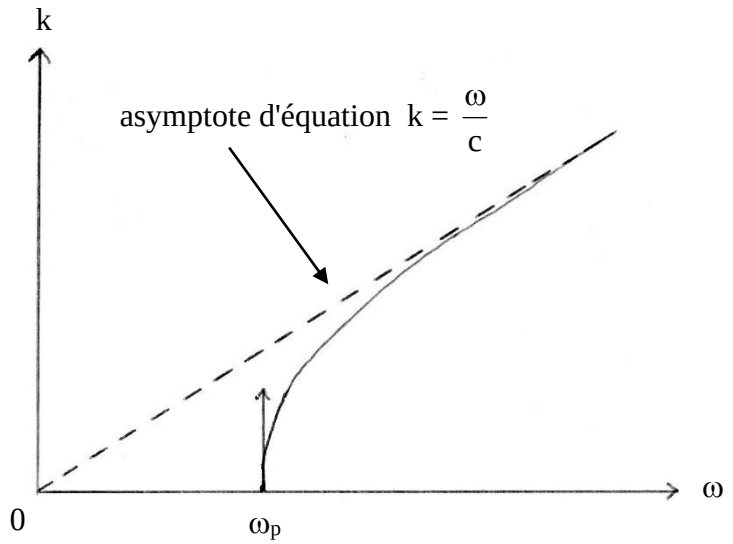
On obtient donc : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

- Si $\omega \geqslant \omega_p$, on obtient $k = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

  ✓ Quand $\omega \to +\infty$, $\omega^2 >> \omega_p^2 \Rightarrow$ k tend vers $\dfrac{\omega}{c}$: la courbe possède donc une asymptote oblique d'équation $k = \dfrac{\omega}{c}$

  ✓ $k(\omega_p) = 0$

  ✓ $\dfrac{dk}{d\omega} = \dfrac{\omega}{c\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$

  Quand $\omega \to \omega_p^+$, $\dfrac{dk}{d\omega}$ tend vers $+\infty \Rightarrow$ la courbe comporte une tangente verticale

On en déduit l'allure de la courbe $k = f(\omega)$, pour $\omega \geqslant \omega_p$: