Mouvement de la valve d'une roue de vélo
(ENAC 2023 – Questions 1 à 6)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

1. $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\,[\omega - \omega\cos(\omega t)]\ \vec{e}_x + R\times(-1)\times(-\,\omega\sin(\omega t))]\ \vec{e}_y$

$= R\omega\,[1 - \cos(\omega t)]\ \vec{e}_x + R\omega\sin(\omega t)\ \vec{e}_y$ ***(réponse A)***

2. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{R^2\omega^2[1-\cos(\omega t)]^2 + R^2\omega^2\sin^2(\omega t)}$

$= R\omega\ \sqrt{1 - 2\cos(\omega t) + \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}$

$= R\omega\ \sqrt{2 - 2\cos(\omega t)}$

$= \sqrt{2}\,R\omega\ \sqrt{1-\cos(\omega t)}$

$= \sqrt{2}\,R\omega\ [1-\cos(\omega t)]^{\frac{1}{2}}$ ***(réponse B)***

3. $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = R\omega\times(-1)\times[-\,\omega\sin(\omega t)]\ \vec{e}_x + R\omega\times\omega\cos(\omega t)\ \vec{e}_y$

$= R\omega^2\sin(\omega t)\ \vec{e}_x + R\omega^2\cos(\omega t)\ \vec{e}_y$ ***(réponse D)***

4.

- $v = \sqrt{2}\,R\omega\ [1-\cos(\omega t)]^{\frac{1}{2}}$

  v s'annule si $\cos(\omega t) = 1 \Rightarrow$ si $\omega t = 2\pi n$, avec $n \in \mathbb{N}$ car ω et t sont positifs

  $\Rightarrow$ si $t = n\times\dfrac{2\pi}{\omega}$, avec $n \in \mathbb{N}$

  La réponse A est donc fausse, et la D, vraie.

- Pour que l'accélération de M s'annule, il faudrait que $\sin(\omega t) = 0$ et $\cos(\omega t) = 0$ simultanément

  $\Rightarrow$ que $\omega t = n\pi$ et $\omega t = (2m+1)\times\dfrac{\pi}{2}$ (avec n et m entiers naturels) simultanément, ce qui impossible.

  $\Rightarrow$ **la réponse B est vraie.**

- Pour que a_y et v_x s'annulent simultanément, il faudrait que $\cos(\omega t) = 0$ et $1 - \cos(\omega t) = 0$ simultanément

  $\Rightarrow$ que $\cos(\omega t) = 0$ et $\cos(\omega t) = 1$ simultanément, ce qui est impossible

  $\Rightarrow$ **la réponse C est fausse.**

5. $\overrightarrow{OM}(t = 0s) = R(0 - \sin 0)\ \vec{e}_x + R(1 - \cos 0)\ \vec{e}_y = \vec{0}$

À $t = 0$ s, la valve est donc située sur l'axe (Ox), en O, et C est à la verticale $\Rightarrow$ $x_C(t=0s) = 0$

$$\overrightarrow{OM}\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) = R\left[\omega\times\frac{2\pi}{\omega} - \sin\left(\omega\times\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]\ \vec{e}_x + R\left[1-\cos\left(\omega\times\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]\ \vec{e}_y$$

$$= 2\pi R\,\vec{e}_x$$

À $t = \frac{2\pi}{\omega}$, la valve est à nouveau située sur l'axe (Ox), donc C est à la verticale, à la même abscisse :

$x_C\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) = 2\pi R$

C, qui se déplace horizontalement, a donc parcouru une distance :

$d = x_C\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) - x_C(t=0s) = 2\pi R$ ***(réponse B)***

6. $$\rho(t) = \left|\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}\right| = \left|\frac{(v_x^2+v_y^2)^{\frac{3}{2}}}{v_x a_y - v_y a_x}\right| = \left|\frac{v^3}{v_x a_y - v_y a_x}\right|$$

$$= \left|\frac{2\sqrt{2}\ R^3\omega^3[1-\cos(\omega t)]^{\frac{3}{2}}}{R\omega[1-\cos(\omega t)]\times R\omega^2\cos(\omega t) - R\omega\sin(\omega t)\times R\omega^2\sin(\omega t)}\right|$$

Or $R\omega[1-\cos(\omega t)]\times R\omega^2\cos(\omega t) - R\omega\sin(\omega t)\times R\omega^2\sin(\omega t) = R^2\omega^3[1-\cos(\omega t)]\cos(\omega t) - R^2\omega^3\sin^2(\omega t)$

$$= R^2\omega^3[\cos(\omega t) - \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)]$$

$$= R^2\omega^3[\cos(\omega t) - 1]$$

$$\Rightarrow \rho(t) = \left|\frac{2\sqrt{2}\ R^3\omega^3[1-\cos(\omega t)]^{\frac{3}{2}}}{R^2\omega^3[\cos(\omega t)-1]}\right| = \frac{2\sqrt{2}\ R[1-\cos(\omega t)]^{\frac{3}{2}}}{1-\cos(\omega t)}$$

car $\cos(\omega t) - 1 \leqslant 0 \Rightarrow |\cos(\omega t) - 1| = 1 - \cos(\omega t)$

Finalement, $\rho(t) = 2\sqrt{2}\ R[1-\cos(\omega t)]^{\frac{1}{2}}$ ***(réponse D)***

<u>Bilan</u> :

1A – 2B – 3D – 4BD – 5B – 6D