Chute d'une gouttelette d'eau dans l'air
(ENAC 2019 – Questions 1 à 6)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

1. $\vec{F}_f = -\alpha\,\vec{v} \Rightarrow F_f = \alpha\,v = 3\pi\eta D\,v \Rightarrow \eta = \dfrac{F_f}{3\pi D v}$

η s'exprime donc en $\dfrac{N}{m \times m.s^{-1}} = \dfrac{kg.m.s^{-2}}{m^2.s^{-1}} = kg.m^{-1}.s^{-1}$ ***(réponse D)***

2.

✓ système : {goutte d'eau}
référentiel : terrestre, considéré galiléen

▪ bilan des forces extérieures appliquées au système :
son poids $\vec{P}$
la force de frottement visqueux due à l'air : $\vec{F}_f = -\alpha\,\vec{v}$
La poussée d'Archimède est négligée (pour les questions 2 à 5)

▪ D'après le principe fondamental de la dynamique, $\Sigma\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$
car le référentiel d'étude est considéré galiléen et la masse du système est constante.

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_f = m\,\vec{a}$

$\Rightarrow m\vec{g} - \alpha\,\vec{v} = m\,\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$\Rightarrow \dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{\alpha}{m}\,\vec{v} = \vec{g}$

$\Rightarrow \dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g}$, avec $\tau = \dfrac{m}{\alpha}$ ***(réponse C)***

3.

✓ solution générale de l'équation homogène (sans second membre) :

$\vec{v}_h = \vec{A}\ e^{-\frac{t}{\tau}}$

✓ solution particulière de l'équation complète (avec second membre) :

Le second membre est un vecteur constant, donc on cherche une solution particulière constante $\vec{v}_p$.

$\vec{v}_p$ est solution de l'équation différentielle $\Rightarrow \dfrac{d\vec{v}_p}{dt} + \dfrac{\vec{v}_p}{\tau} = \vec{g}$

Or $\vec{v}_p$ est constant $\Rightarrow \dfrac{d\vec{v}_p}{dt} = \vec{0}$

On obtient donc : $\vec{0} + \dfrac{\vec{v}_p}{\tau} = \vec{g}$

$\Rightarrow \vec{v}_p = \vec{g}\,\tau$

✓ La solution générale de l'équation complète (avec second membre) est donc :

$\vec{v} = \vec{v}_h + \vec{v}_p$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{A}\; e^{-\frac{t}{\tau}} + \vec{g}\,\tau$

✓ Déterminons $\vec{A}$ en utilisant une condition initiale.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}\ (t = 0s) = \vec{A} + \vec{g}\,\tau \\ \vec{v}\ (t = 0s) = \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{A} + \vec{g}\,\tau = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} = -\,\vec{g}\,\tau$$

Finalement, $\vec{v} = -\,\vec{g}\,\tau\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \vec{g}\,\tau$

c'est-à-dire : $\vec{v}\,(t) = \vec{g}\,\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ ***(réponse C)***

4. $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{r}\,(t) = \vec{g}\,\tau \left(t - (-\tau)\times e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \vec{C} = \vec{g}\,\tau\, t + \tau^2\, \vec{g}\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \vec{C}$

Déterminons $\vec{C}$ en utilisant une condition initiale.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}\ (t = 0s) = \tau^2\, \vec{g} + \vec{C} \\ \vec{r}\ (t = 0s) = \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \tau^2\, \vec{g} + \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} = -\,\tau^2\, \vec{g}$$

Finalement, $\vec{r}\,(t) = \vec{g}\,\tau\, t + \tau^2\, \vec{g}\, e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau^2\, \vec{g}$

c'est-à-dire : $\vec{r}\,(t) = \vec{g}\,\tau\, t - \tau^2\, \vec{g} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ ***(réponse C)***

5. $\vec{v}_\ell = \lim\limits_{t\to+\infty} \vec{v}(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left[\vec{g}\,\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right] = \vec{g}\,\tau$

$$\Rightarrow v_\ell = \|\vec{v}_\ell\| = g\tau = \frac{mg}{\alpha} = \frac{\rho_e \times \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 g}{3\pi\eta D}$$

$$\Rightarrow \quad v_\ell = \frac{\rho_e D^2 g}{18\eta} = \frac{1000\times(10\times10^{-6})^2\times 10}{18\times 2\times 10^{-5}} = 2{,}8\times10^{-3}\ \text{m.s}^{-1} = 2{,}8\ \text{mm.s}^{-1}$$ ***(réponse A)***

6. En tenant compte cette fois de la poussée d'Archimède, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{F}_f + \vec{F}_A = m\,\vec{a}$$

Or en régime permanent, la goutte a un mouvement rectiligne uniforme : $\vec{v} = \vec{v}_{\ell,A}$ et $\vec{a} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad m\vec{g} - \alpha\,\vec{v}_{\ell,A} + \vec{F}_A = \vec{0}$$

En projetant cette relation sur l'axe vertical ascendant, on obtient : $-\,mg + \alpha\, v_{\ell,A} + F_A = 0$

$$\Rightarrow \quad v_{\ell,A} = \frac{mg - F_A}{\alpha} = \frac{\rho_e V g - \rho_a V g}{\alpha} = \frac{(\rho_e - \rho_a)Vg}{\alpha}$$

Sachant de plus, d'après la question 5., que $v_\ell = \dfrac{mg}{\alpha} = \dfrac{\rho_e V g}{\alpha}$, on peut en déduire l'écart relatif demandé :

$$\left|\frac{v_{\ell,A} - v_\ell}{v_{\ell,A}}\right| = \left|\frac{\dfrac{(\rho_e-\rho_a)Vg}{\alpha} - \dfrac{\rho_e V g}{\alpha}}{\dfrac{(\rho_e-\rho_a)Vg}{\alpha}}\right| = \left|\frac{-\,\rho_a}{\rho_e - \rho_a}\right| = \frac{\rho_a}{\rho_e-\rho_a} = \frac{1}{1000-1} = 1\times10^{-3} = 0{,}1\ \%$$

(réponse B)

Bilan :

1D – 2C – 3C – 4C – 5A – 6B