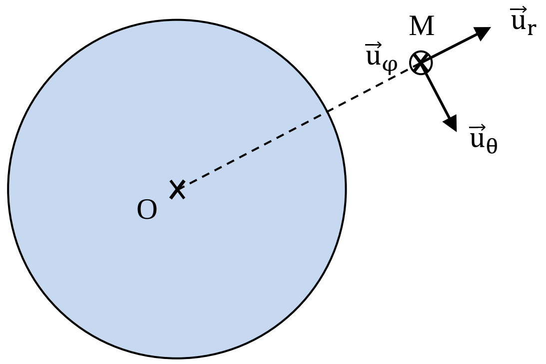
**Correction des questions 31 à 33**
**du sujet ENAC Pilotes - 2010**

*Réalisée par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie*


**31.**




Plaçons-nous dans un repère sphérique.
On a alors : $\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi).\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi).\vec{u}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi).\vec{u}_\varphi$

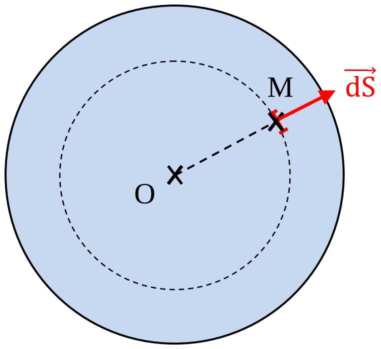
- Etude des symétries :
  Le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie, donc $\vec{E}$ appartient à ce plan.
  Le plan $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$ est un plan de symétrie, donc $\vec{E}$ appartient à ce plan.
  Le champ $\vec{E}$ est donc dirigé selon $\vec{u}_r$ : $\vec{E}(M) = E\,(r,\theta,\varphi).\vec{u}_r$

- Etude des invariances :
  Il y a invariance de la distribution de charges par toute rotation autour de O, donc E ne dépend pas de $\theta$ ni de $\varphi$.
  On obtient donc : $\vec{E}(M) = E(r).\vec{u}_r$

- Détermination de E(r) par application du théorème de Gauss :
  Appliquons le théorème de Gauss à une sphère de centre O et de rayon r.

  D'après le théorème de Gauss, $$\oiint_{(S_{Gauss})} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

➢ 1^er^ cas : si $r < R$




$$\oiint_{(S_{Gauss})} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint_{(S_{Gauss})} E(r)\,\vec{u}_r \,.\, dS\,\vec{u}_r = \oiint_{(S_{Gauss})} E(r)\,dS = E(r) \oiint_{(S_{Gauss})} dS$$

*(car E(r) est constant sur la surface de Gauss)*

On obtient : $$\oiint_{(S_{Gauss})} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E(r) \times 4\pi r^2$$

De plus, $$Q_{int} = \iiint_{\begin{pmatrix}\text{volume inclus}\\ \text{dans la surface}\\ \text{de Gauss}\end{pmatrix}} \rho_e.\,d\tau = \rho_e \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

L'équation (1) donne alors : $E(r) \times 4\pi r^2 = \dfrac{4\pi r^3 \rho_e}{3\varepsilon_0}$ , soit $E(r) = \dfrac{\rho_e r}{3\varepsilon_0}$

Finalement, si $r < R$, $$\boxed{\vec{E}\,(M) = \frac{\rho_e r}{3\varepsilon_0}\,\vec{u}_r = \frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{O_1M}}$$ *(réponse D)*

**32.**

➢ 2^ème^ cas : si $r \geqslant R$

En adoptant le même raisonnement que dans le cas précédent, on obtient :

$$\oiint_{(S_{Gauss})} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E(r) \times 4\pi r^2$$

De plus, $$Q_{int} = \iiint_{\begin{pmatrix}\text{volume inclus}\\ \text{dans la surface}\\ \text{de Gauss}\end{pmatrix}} \rho_e.\,d\tau = \rho_e \times \frac{4}{3}\pi R^3 + \sigma_e \times 4\pi R^2$$

L'équation (1) donne ainsi : $4\pi r^2\, E(r) \;=\; \dfrac{4\pi R^3 \rho_e}{3\varepsilon_0} + \dfrac{4\pi R^2 \sigma_e}{\varepsilon_0}$

soit $E(r) \;=\; \left(\dfrac{R^3\rho_e}{3\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma_e R^2}{\varepsilon_0}\right) \times \dfrac{1}{r^2}$

Finalement,

si $r > R$, $\vec{E}\,(M) = \left(\dfrac{R^3\rho_e}{3\varepsilon_0} + \dfrac{R^2\sigma_e}{\varepsilon_0}\right) \times \dfrac{1}{r^2}\; \vec{u}_r$

c'est-à-dire, comme $r = O_1M$ et $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{O_1M}}{\left\|\overrightarrow{O_1M}\right\|}$ , $\boxed{\vec{E}\,(M) = \left(\dfrac{R^3\rho_e}{3\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma_e R^2}{\varepsilon_0}\right) \times \dfrac{\overrightarrow{O_1M}}{\left\|\overrightarrow{O_1M}\right\|^3}}$

*(réponse A)*

**33.** Le champ gravitationnel créé par une particule A de masse m en un point B situé à une distance r est :

$\vec{g}_B \;=\; -\dfrac{\mathcal{G}\, m}{r^2}\; \vec{u}_{AB}$

D'autre part, le champ électrique créé par une particule A de charge électrique q en un point B situé à une distance r est :

$\vec{E}_B \;=\; \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\; \vec{u}_{AB}$

On en déduit l'analogie suivante : $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \leftrightarrow -\mathcal{G}$ , c'est-à-dire $\varepsilon_0 = -\dfrac{1}{4\pi\mathcal{G}}$

$q \leftrightarrow m$

$\rho_e \leftrightarrow \rho_m$

$\sigma_e \leftrightarrow \sigma_m$

On en déduit le champ gravitationnel à la surface de la planète modélisée comme indiqué dans l'énoncé :

$$\vec{g}_0 \;=\; \left(-\frac{4\pi\mathcal{G} R^3\rho_m}{3} - 4\pi\mathcal{G}\sigma_m R^2\right) \times \frac{\overrightarrow{O_1M}}{\left\|\overrightarrow{O_1M}\right\|^3}$$

Ainsi, $g_0 \;=\; 4\pi\mathcal{G}\left(\dfrac{R^3\rho_m}{3} + \sigma_m R^2\right) \times \dfrac{R}{R^3}$

c'est-à-dire : $g_0 \;=\; 4\pi\mathcal{G}\left(\dfrac{R\rho_m}{3} + \sigma_m\right)$ *(réponse B)*