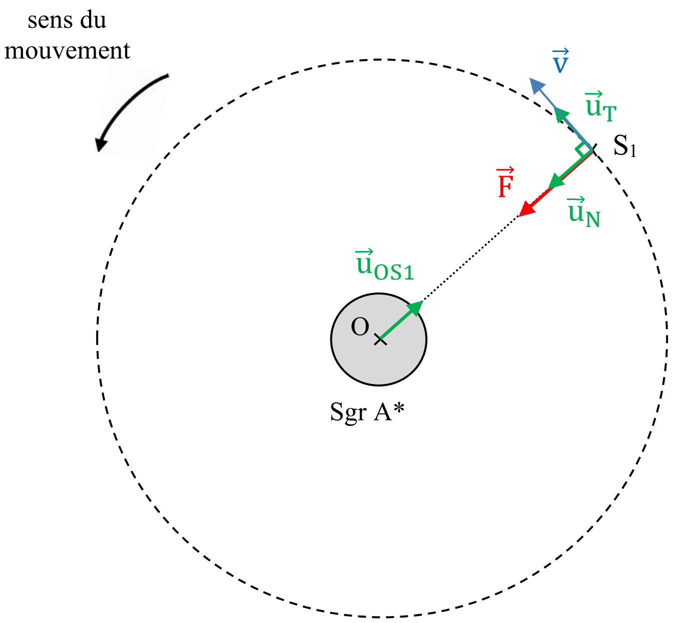
Sagittarius A*
(Bac Spécialité SI - Métropole - mars 2023)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

1.



2.

- système : {étoile S_1}
  référentiel : Sagittariusocentrique, considéré galiléen

- bilan des forces extérieures appliquées au système :
  la force gravitationnelle exercée par Sgr A* sur l'étoile S_1 :
  $$\vec{F}_{SgrA^*/S_1} = -\frac{GM_{A^*}M_{S_1}}{R^2}\,\vec{u}_{OS1} = \frac{GM_{A^*}M_{S_1}}{R^2}\,\vec{u}_N$$
  On néglige les forces gravitationnelles dues aux autres astres.

- D'après la 2ème loi de Newton, $\Sigma\vec{F}_{ext} = M_{S1}\,\vec{a}_{S_1}$
  car le référentiel d'étude est considéré galiléen et la masse du système est constante.

  $$\Rightarrow \vec{F}_{T/S} = M_{S1}\,\vec{a}_{S_1} \Rightarrow M_{S1}\,\vec{a}_{S_1} = \frac{GM_{A^*}M_{S_1}}{R^2}\,\vec{u}_N$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{S_1} = \frac{GM_{A^*}}{R^2}\ \vec{u}_N$$

3. Dans le cas d'un point S_1 ayant un mouvement circulaire de rayon R, $\vec{a}_{S_1} = \frac{dv}{dt}\ \vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\ \vec{u}_N$

Or d'après la question précédente, $\vec{a}_{S_1} = \frac{GM_{A^*}}{R^2}\ \vec{u}_N \Rightarrow \vec{a}_{S_1} = 0\ \vec{u}_T + \frac{GM_{A^*}}{R^2}\ \vec{u}_N$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = 0 & \textit{(1)} \\ \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{GM_{A^*}}{R^2} & \textit{(2)} \end{cases}$$

D'après l'équation (1), $\frac{dv}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = cte$: le mouvement est uniforme

4. D'après l'équation (2), $\frac{v^2}{R} = \frac{GM_{A^*}}{R^2}$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_{A^*}}{R}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_{A^*}}{R}}$$

5.

- Commençons par déterminer l'expression de la période de révolution T de S_1 autour de Sgr A*
  C'est la durée qu'il faut pour que S_1 effectue 1 tour sur sa trajectoire autour de la Sgr A*
  S_1 parcourt, à vitesse constante, la distance $\ell = 2\pi R$ pendant une durée $\Delta t = T$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM_{A^*}}{R}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_{A^*}}}$$

- On en déduit que : $T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_{A^*}}$

  donc que : $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{A^*}}$

6. La courbe $T^2 = f(a^3)$ est une droite passant par l'origine, donc T^2 est proportionnel à a^3 : $T^2 = k \times a^3$, où k est le coefficient directeur de la droite.

Le rapport $\dfrac{T^2}{a^3}$ a donc la même valeur ($k = 7{,}342 \times 10^{-26}\ s^2.m^{-3}$) pour les 5 étoiles étudiées.

La 3ème loi de Kepler est donc vérifiée pour ces 5 étoiles.

7.

- $k = \dfrac{4\pi^2}{GM_{A*}} \Rightarrow M_{A*} = \dfrac{4\pi^2}{Gk} = \dfrac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 7{,}342 \times 10^{-26}} = 8{,}06 \times 10^{36}$ kg

- Comparons-la à celle du Soleil.

$$\frac{M_{A*}}{M_S} = \frac{8{,}06 \times 10^{36}}{1{,}989 \times 10^{30}} = 4{,}05 \times 10^6$$

$\Rightarrow M_{A*} = 4{,}05 \times 10^6 \times M_S$, c'est-à-dire 4,05 millions de masses solaires.

Étudions si c'est en accord les résultats de l'exploitation des observations du télescope ESO-VLT en 2021 : (4,30 ± 0,01) millions de masses solaires.

$\left| \dfrac{4{,}30 - 4{,}05}{0{,}01} \right| = 25 \geqslant 2 \Rightarrow$ le résultat obtenu n'est pas compatible