

La fermentation lactique
(D'après Bac Spécialité SI - Métropole - mars 2022)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

© <http://b.louchart.free.fr>

1. Le transfert thermique a lieu du corps de température la plus élevée vers celui de température la plus faible, donc du lait vers l'air.

2. $\Delta U = C \Delta \theta$

Ainsi, comme $C > 0$, et que la température θ du système étudié diminuant au cours du temps, $\Delta \theta < 0$, on en déduit que $\Delta U < 0$

3. D'après le 1^{er} principe de la thermodynamique, $\Delta E_m + \Delta U = W + Q$

Or : $\Delta E_m = 0 \text{ J}$

$\Delta U = C \Delta \theta$

$W = 0 \text{ J}$

$Q = h S (\theta_{\text{ext}} - \theta) \times \Delta t$

On obtient donc : $C \Delta \theta = h S (\theta_{\text{ext}} - \theta) \times \Delta t$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{hS}{C} (\theta_{\text{ext}} - \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{hS}{C} \theta_{\text{ext}} - \frac{hS}{C} \theta$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \theta}{\Delta t} + \frac{hS}{C} \theta = \frac{hS}{C} \theta_{\text{ext}}$$

Faisons tendre Δt vers 0.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}, \text{ donc on obtient : } \frac{d\theta}{dt} + \frac{hS}{C} \theta = \frac{hS}{C} \theta_{\text{ext}}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\tau} = \frac{\theta_{\text{ext}}}{\tau}, \text{ avec } \tau = \frac{C}{hS}$$

4. Déterminons la solution de cette équation différentielle :

▪ solution générale de l'équation homogène :

$$\theta_h = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- solution particulière de l'équation complète :

Le second membre est une constante, donc on cherche une solution particulière constante ($\theta_p = K$).
Déterminons θ_p

$$\theta_p \text{ est solution de l'équation différentielle } \Rightarrow \frac{d\theta_p}{dt} + \frac{\theta_p}{\tau} = \frac{\theta_{\text{ext}}}{\tau}$$

$$\text{Or } \theta_p = K \Rightarrow \frac{d\theta_p}{dt} = 0$$

$$\text{On obtient donc : } \frac{\theta_p}{\tau} = \frac{\theta_{\text{ext}}}{\tau}$$

$$\Rightarrow \theta_p = \theta_{\text{ext}}$$

- La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\theta = \theta_h + \theta_p$$

$$\Rightarrow \theta = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{\text{ext}}$$

- Déterminons λ en utilisant la condition initiale : à $t = 0$ s, $\theta = \theta_0$

$$\left. \begin{array}{l} \theta(t=0s) = \lambda e^{-\frac{0}{\tau}} + \theta_{\text{ext}} = \lambda + \theta_{\text{ext}} \\ \theta(t=0s) = \theta_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + \theta_{\text{ext}} = \theta_0 \Rightarrow \lambda = \theta_0 - \theta_{\text{ext}}$$

$$\text{Finalement, } \theta(t) = (\theta_0 - \theta_{\text{ext}}) \times e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{\text{ext}}$$

5. En comparant cette relation avec celle fournie dans l'énoncé, on obtient, par identification :

$$\tau = 38 \text{ min}$$

$$\theta_{\text{ext}} = 27^\circ\text{C}$$

$$\theta_0 - \theta_{\text{ext}} = 29^\circ\text{C} \Rightarrow \theta_0 = \theta_{\text{ext}} + 29 = 27 + 29 = 56^\circ\text{C}$$

6.

✓ 1^{ère} méthode :

Calculons l'instant t_1 auquel la température vaut $\theta_1 = 45^\circ\text{C}$

$$\theta(t) = \theta_1 \Rightarrow (\theta_0 - \theta_{\text{ext}}) \times e^{-\frac{t_1}{\tau}} + \theta_{\text{ext}} = \theta_1$$

$$\Rightarrow (\theta_0 - \theta_{\text{ext}}) \times e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \theta_1 - \theta_{\text{ext}}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{\theta_1 - \theta_{\text{ext}}}{\theta_0 - \theta_{\text{ext}}}$$

$$\Rightarrow -\frac{t_1}{\tau} = \ln\left(\frac{\theta_1 - \theta_{\text{ext}}}{\theta_0 - \theta_{\text{ext}}}\right)$$

$$\Rightarrow t_1 = -\tau \ln\left(\frac{\theta_1 - \theta_{\text{ext}}}{\theta_0 - \theta_{\text{ext}}}\right) = -38 \ln\left(\frac{45 - 27}{56 - 27}\right) = 18 \text{ min}$$

En opérant de même, on trouve que le système atteint la température $\theta_2 = 42^\circ\text{C}$ à l'instant :

$$t_2 = -\tau \ln \left(\frac{\theta_2 - \theta_{\text{ext}}}{\theta_0 - \theta_{\text{ext}}} \right) = -38 \ln \left(\frac{42 - 27}{56 - 27} \right) = 25 \text{ min}$$

La durée de la partie optimale de la fermentation (entre 42°C et 45°C) est donc :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 25 - 18 = 7 \text{ min}$$

C'est très inférieur à la durée minimale indiquée dans le texte (3 à 4h), donc le processus de fermentation ne s'est pas réalisé correctement au cours de l'expérience.

✓ 2^{ème} méthode :

$$\theta (\tau = 38 \text{ min}) = 29 \times e^{-\frac{38}{38}} + 27 = 38^\circ\text{C}$$

En 38 minutes, la température est descendue de 56°C à 38°C .

La température du système n'a donc pas pu être comprise entre 42°C et 45°C pendant au minimum 3 à 4h.

Le processus de fermentation ne s'est donc pas effectué de façon optimale.

✓ 3^{ème} méthode :

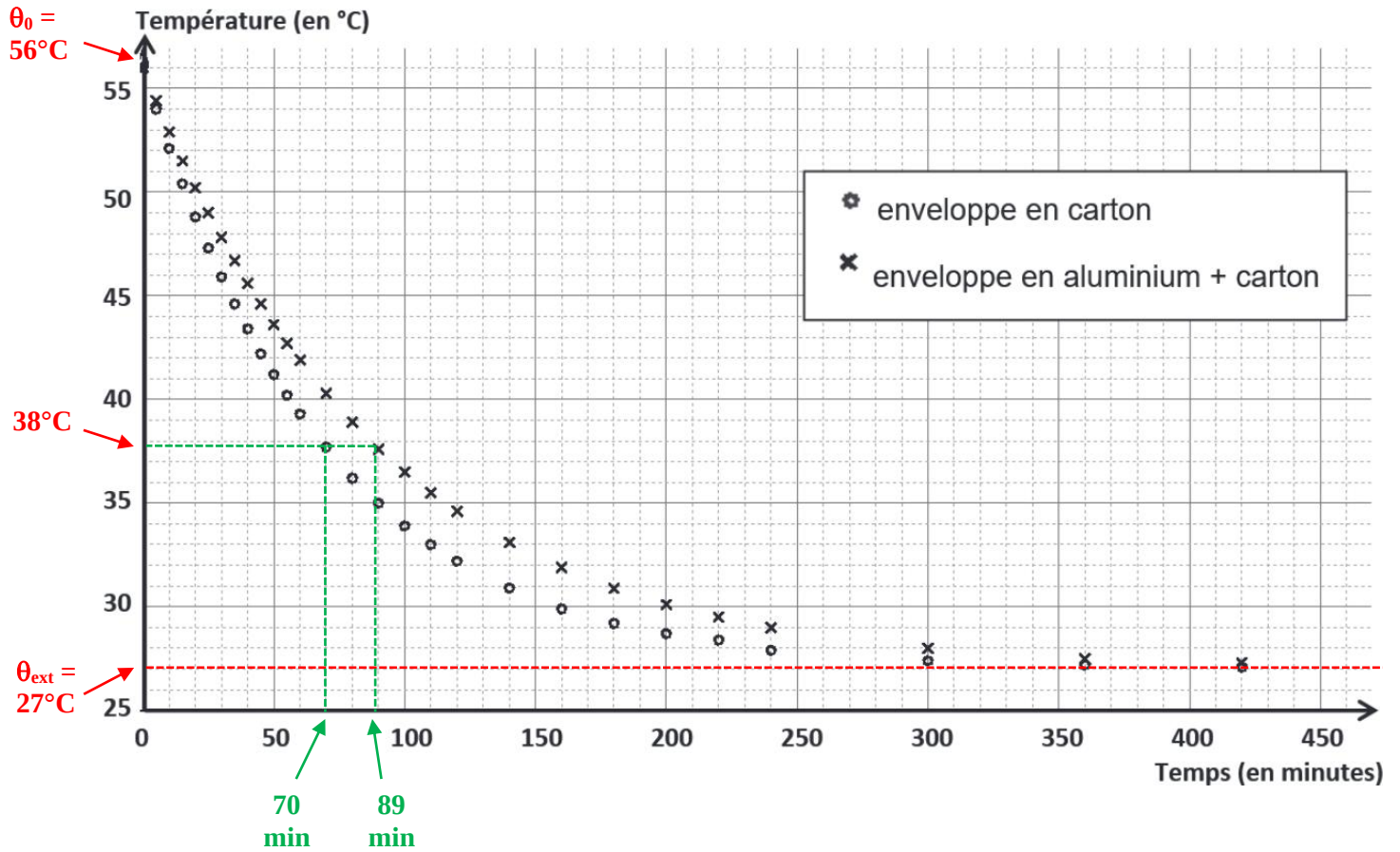
$$\theta (t = 3\text{h}) = 29 \times e^{-\frac{180}{38}} + 27 = 38^\circ\text{C}$$

En 3h, la température est descendue de 56°C à 27°C .

La température du système n'a donc pas pu être comprise entre 42°C et 45°C pendant au minimum 3 à 4h.

Le processus de fermentation ne s'est donc pas effectué de façon optimale.

7.



Déterminons le temps caractéristique pour chacune des expériences.

$$\theta(\tau) = \theta_{ext} + e^{-1} \times (\theta_0 - \theta_{ext}) = 27 + 0,37 \times (56 - 27) = 38^\circ\text{C}$$

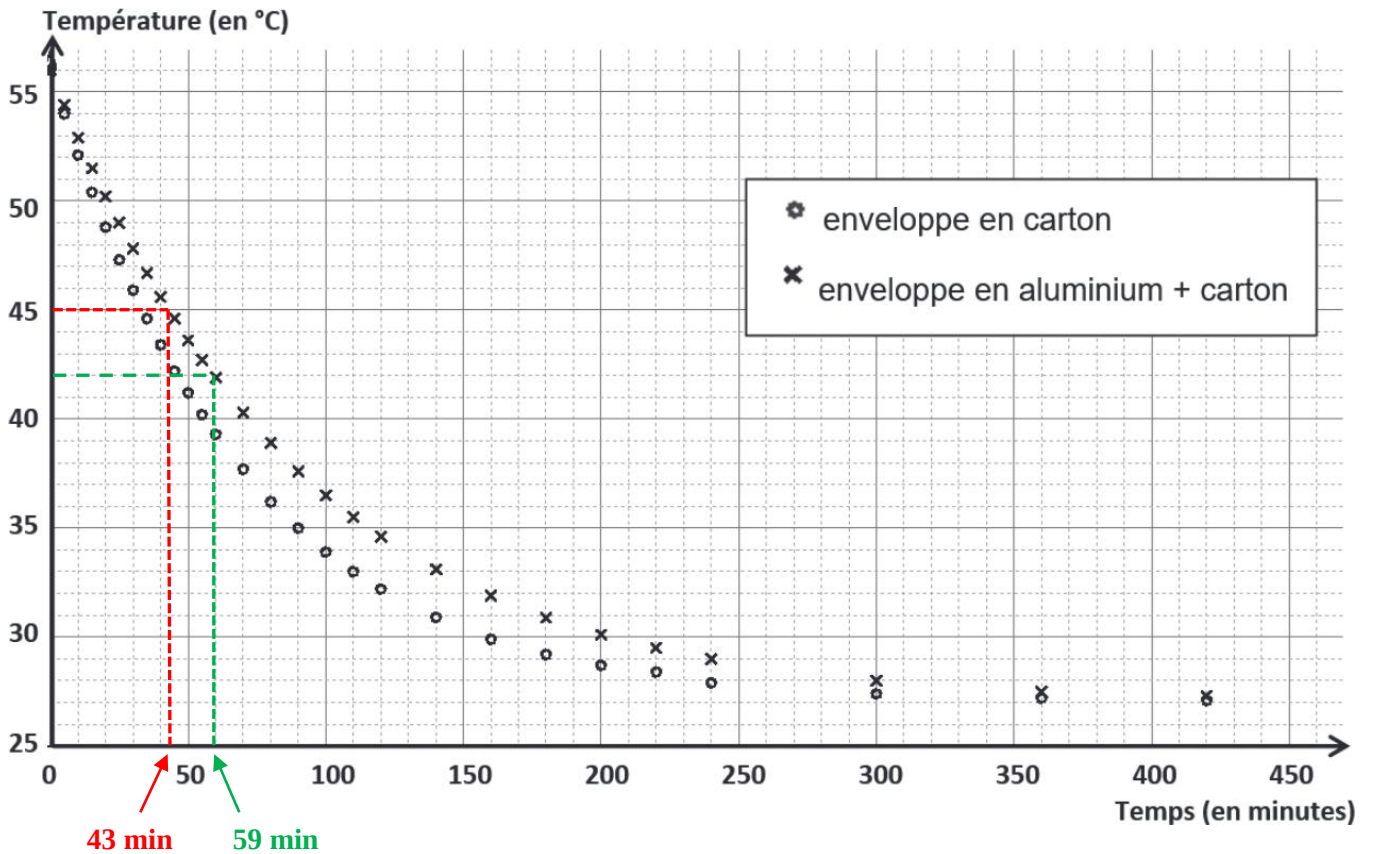
D'après le graphique, on obtient donc :

- pour la 2^{ème} expérience, $\tau_2 = 70 \text{ min}$
- pour la 3^{ème} expérience, $\tau_3 = 89 \text{ min}$

On a donc $\tau_3 > \tau_2$

8. La feuille d'aluminium a diminué les transferts thermiques par rayonnement entre le système et l'extérieur.

9.



D'après le graphique, la durée pendant laquelle la température est comprise entre 42°C et 45°C vaut $59 - 43 = 16$ min

C'est supérieur à la valeur obtenue pour la 1^{ère} expérience (7 min), mais encore très inférieur à la durée minimale de 3 à 4 h préconisée dans le texte.

Le processus de fermentation n'est donc pas réalisé correctement non plus dans l'expérience 3.

10. La yaourtière électrique comporte un système de chauffage qui permet de maintenir une température entre 42°C et 45°C pendant les 3 à 4h minimales pour effectuer correctement la fermentation.