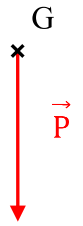
Protection des crapauds
(Bac Spécialité Physique-Chimie - Métropole - mars 2023)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

1.

- système : {crapaud}
  référentiel : terrestre, considéré galiléen

- bilan des forces extérieures appliquées au système :
  $\vec{P}$ son poids
  On néglige les frottements liés à l'action de l'air,
  ainsi que la poussée d'Archimède.



- D'après la 2ème loi de Newton, $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$
  car le référentiel d'étude est considéré galiléen et la masse du système est constante.

  $\Rightarrow \vec{P} = m\vec{a}_G$

  $\Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a}_G$

  $\Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$

- $\vec{a}_G \begin{vmatrix} a_x \\ a_z \end{vmatrix} = \vec{g} \begin{vmatrix} 0 \\ -g \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_G \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{vmatrix}$

2.

- $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}_G}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_G \begin{vmatrix} v_x = C_1 \\ v_z = -gt + C_2 \end{vmatrix}$

  Or $\vec{v}_G\ (t=0\ s) \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix} = \vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = v_0 \cos\alpha \\ C_2 = v_0 \sin\alpha \end{cases}$

  Donc $\vec{v}_G\,(t) \begin{vmatrix} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_z = -gt + v_0 \sin\alpha \end{vmatrix}$

3. $\vec{v}_G = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \Rightarrow \overrightarrow{OG} \left| \begin{array}{l} x = (v_0 \cos\alpha)\, t + C_3 \\ z = -\dfrac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t + C_4 \end{array} \right.$

Or $\overrightarrow{OG}$ (t=0 s) $\left| \begin{array}{l} C_3 \\ C_4 \end{array} \right. = \overrightarrow{OG_0} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases}$

Donc $\overrightarrow{OG}$ (t) $\left| \begin{array}{l} x = (v_0 \cos\alpha)\, t \\ z = -\dfrac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t \end{array} \right.$

4. Notons t_{att} l'instant où le crapaud atterrit sur le sol : $z(t_{att}) = 0$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2} g\, t_{att}^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t_{att} = 0$

$\Rightarrow t_{att} \left(-\dfrac{1}{2} g\, t_{att} + v_0 \sin\alpha\right) = 0$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2} g\, t_{att} + v_0 \sin\alpha = 0$ car $t_{att} \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} g\, t_{att} = v_0 \sin\alpha$

$\Rightarrow t_{att} = \dfrac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$

La durée du saut vaut donc : $t_{saut} = t_{att} - t_{départ} = \dfrac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$ car $t_{départ} = 0$ s

5. Si la longueur du saut du crapaud vaut d, alors $x(t_{saut}) = d$

$\Rightarrow (v_0 \cos\alpha)\, t_{saut} = d$

$\Rightarrow (v_0 \cos\alpha) \times \dfrac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = d$

$\Rightarrow v_0^2 = \dfrac{gd}{2 \sin\alpha \cos\alpha}$

$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{gd}{2 \sin\alpha \cos\alpha}}$

6. D'après les données, les crapauds les plus puissants peuvent faire des sauts d'une longueur égale à 20 fois leur taille, donc $d_{max} = 20 \times 10 = 2{,}0 \times 10^2$ cm $= 2{,}0$ m

La vitesse initiale correspondante vaut ainsi, pour un angle $\alpha = 45°$:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g d_{max}}{2 \sin\alpha \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \times 2{,}0}{2 \times (\sin 45°) \times (\cos 45°)}} = 4{,}4 \text{ m.s}^{-1}$$

7. Pour un saut vertical, $\alpha = 90°$, donc $\sin\alpha = 1$

$$\Rightarrow \quad z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t$$

Si z est maximal à l'instant t_{max}, alors $\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_{max}} = 0 \;\Rightarrow\; -g t_{max} + v_0 = 0 \;\Rightarrow\; g t_{max} = v_0 \;\Rightarrow\; t_{max} = \frac{v_0}{g}$

On en déduit l'altitude maximale atteinte :

$$z_{max} = z(t_{max}) = -\frac{1}{2} g\, t_{max}^2 + v_0\, t_{max} = -\frac{1}{2} g \times \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \times \frac{v_0}{g} = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g}$$

$$\Rightarrow \quad z_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

8. Pour arrêter les crapauds les plus puissants, la hauteur minimale de la barrière doit être égale à la hauteur maximale qu'il peuvent atteindre :

$$H_{champion} = z_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{4{,}4^2}{2 \times 9{,}81} = 1{,}0 \text{ m}$$

9. Seuls les crapauds les plus puissants peuvent atteindre une altitude de 1,0 m.
De plus, cette hauteur de 1,0 m n'est atteinte que pour un saut vertical ($\alpha = 90°$) : dans les autres cas, l'altitude maximale atteinte sera inférieure.
Réduire la hauteur du grillage à 50 ou 60 cm permet donc d'empêcher la majorité des crapauds de passer, tout en limitant la consommation de grillage.