Modélisation d'un détecteur capacitif d'humidité
(Bac Spécialité Physique-Chimie - Métropole - mars 2023)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

1. Modélisation de la charge du condensateur

1. D'après le graphique de la figure 2, quand la teneur en eau du sol augmente, la permittivité ε augmente elle aussi.

De plus, $C = \dfrac{\varepsilon S}{d}$, donc si ε augmente (les autres paramètres restant constants), alors C augmente.

Ainsi, la capacité C du détecteur capacitif d'humidité augmente si la teneur en eau du sol augmente.

2. D'après la loi des mailles, $u_R + u_c = E$

De plus, d'après la loi d'Ohm, $u_R = Ri \Rightarrow Ri + u_c = E$

Or $i = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d(Cu_c)}{dt} = C\dfrac{du_c}{dt}$

On obtient donc : $RC\dfrac{du_c}{dt} + u_c = E$, c'est-à-dire : $\tau\dfrac{du_c}{dt} + u_c = E$, avec $\tau = RC$

3.

- Pour vérifier si la fonction $u_c(t) = E\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ est solution de cette équation différentielle, calculons $\tau\dfrac{du_c}{dt} + u_c$

  $\tau\dfrac{du_c}{dt} + u_c = \tau \times E \times \dfrac{1}{\tau}\; e^{-\frac{t}{\tau}} + E\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = E\; e^{-\frac{t}{\tau}} + E - E\; e^{-\frac{t}{\tau}} = E$

  La fonction $u_c(t) = E\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ est donc bien solution de l'équation différentielle : $\tau\dfrac{du_c}{dt} + u_c = E$

- $u_c(t = 0\text{ s}) = E\,(1 - e^{-\frac{0}{\tau}}) = E\,(1 - 1) = 0\text{ V}$
  Cette valeur correspond à la valeur imposée à la date t = 0 s : le condensateur est déchargé, donc $u_c(t = 0\text{ s}) = 0$ V.

4. $u_c(t = \tau) = E\,(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}) = E\,(1 - e^{-1}) = 0{,}63 \times E$

2. Modélisation de la mesure de teneur en eau d'un sol argileux

5. Le microcontrôleur relève 52000 mesures par seconde, donc une mesure est réalisée tous les :

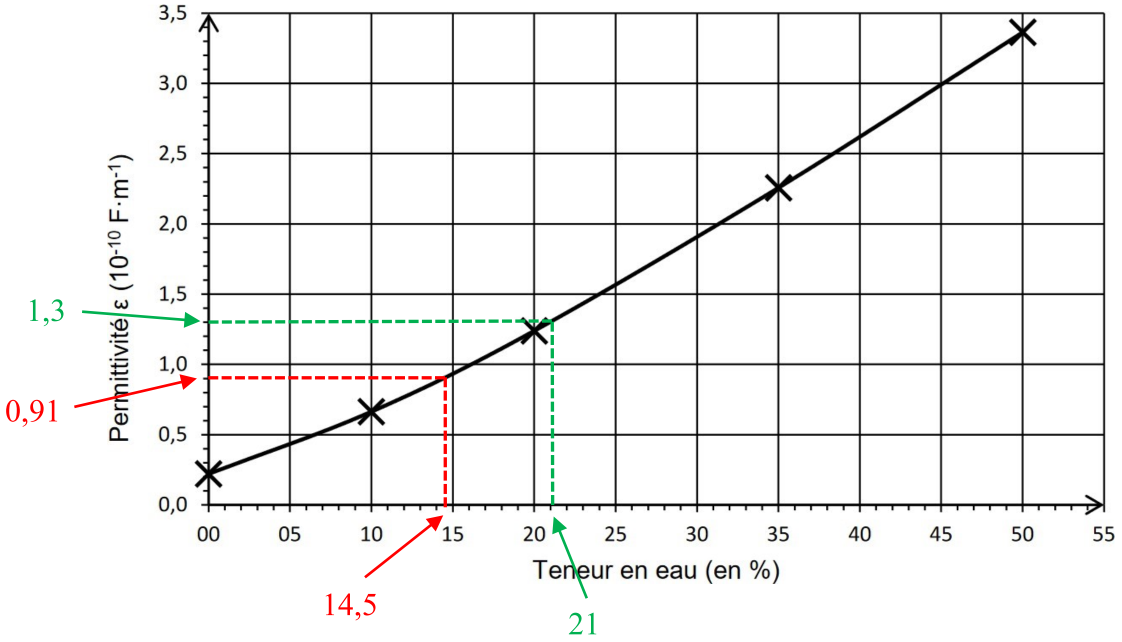
$$T_e = \frac{1}{52000} = 1{,}92\times10^{-5}\ \text{s} = 19{,}2\ \mu\text{s}$$

De plus, pour que la mesure soit suffisamment précise, on doit disposer d'au moins 10 valeurs de tension aux bornes du condensateur avant d'atteindre le temps caractéristique du circuit RC.

Le temps caractéristique doit donc valoir au moins $\tau_{min} = 10\ Te = 10\times19{,}2 = 1{,}9\times10^2\ \mu\text{s}$, donc être de l'ordre de 200 µs.

6. $\tau_{min} = RC_{min} \Rightarrow C_{min} = \dfrac{\tau_{min}}{R} = \dfrac{200\times10^{-6}}{2{,}2\times10^{5}} = 9{,}1\times10^{-10}\ \text{F}$

Or $C_{min} = \dfrac{\varepsilon_{min}S}{d} \Rightarrow \varepsilon_{min} = \dfrac{C_{min}d}{S} = \dfrac{9{,}1\times10^{-10}\times1{,}0\times10^{-2}}{1{,}0\times10^{-1}} = 9{,}1\times10^{-11}\ \text{F.m}^{-1} = 0{,}91\times10^{-10}\ \text{F.m}^{-1}$



D'après le graphique, on en déduit que la teneur minimale en eau d'un sol qu'il est capable de mesurer est de 14,5 %

7. Le but final de cet extrait de programme est de calculer le temps caractéristique τ et de l'afficher (exprimé en ms) sur l'écran.

8. À la ligne 5, il faut donc indiquer : `while tension < 0.63*E`

9. $\tau = RC = R\times\dfrac{\varepsilon S}{d} \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{\tau d}{RS} = \dfrac{0{,}28676887987\times10^{-3}\times1{,}0\times10^{-2}}{2{,}2\times10^{5}\times1{,}0\times10^{-1}} = 1{,}3\times10^{-10}\ \text{F.m}^{-1}$

D'après le graphique de la figure, cela correspond à une teneur en eau de 21 %

Cette valeur n'est pas comprise entre 24 et 38 %, elle n'est pas suffisante pour que la plante ait une croissance normale.