Correction de l'exercice
"Quelques utilisations du condensateur"
(d'après Bac Spécialité Physique-Chimie (Liban - mars 2022) légèrement modifié)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie
© *http://b.louchart.free.fr*

Partie 1. La balance capacitive

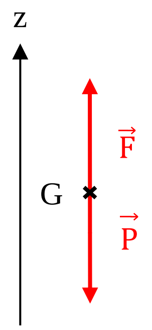
1. Domaine d'utilisation de la balance

1.1. $C_0 = \varepsilon_0\varepsilon_r \dfrac{S}{e} = \varepsilon_0\varepsilon_r \times \dfrac{L \times \ell}{e} = 8{,}85\times10^{-12} \times 1{,}0 \times \dfrac{4{,}0\times10^{-2} \times 3{,}0\times10^{-2}}{1{,}00\times10^{-2}} = 1{,}1\times10^{-12}\ \text{F} = 1{,}1\ \text{pF}$

1.2. $C = \varepsilon_0\varepsilon_r \dfrac{S}{e}$

Si on place une masse sur le plateau, la distance e entre les 2 armatures diminue (avec ε_0 , ε_r et S constants), donc d'après la formule précédente, la capacité C du condensateur augmente.

1.3.1.



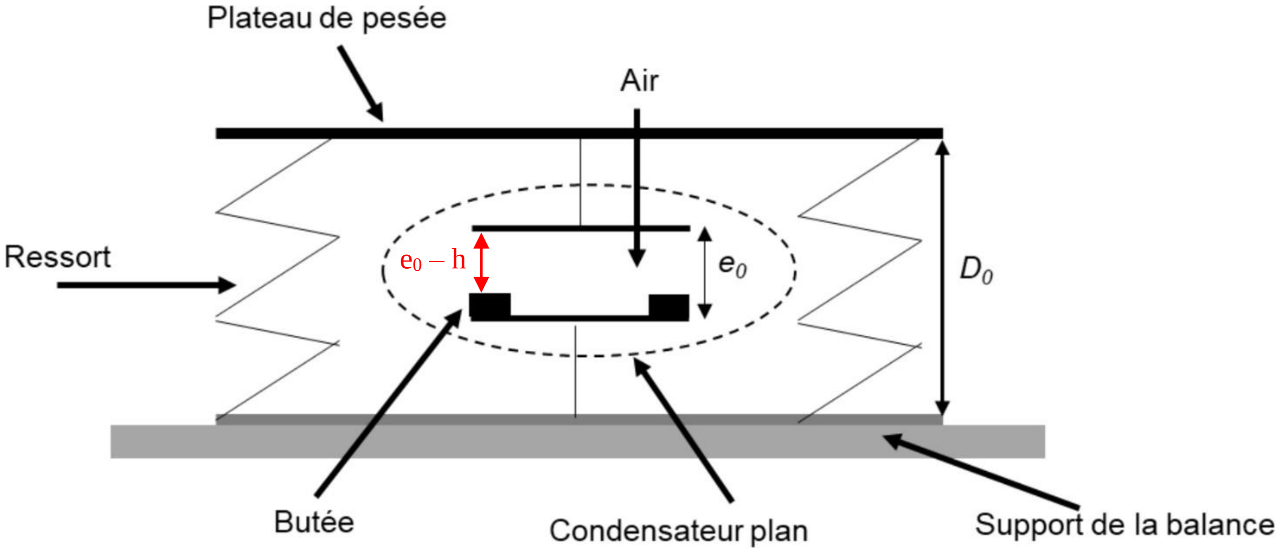
- système : {objet de masse M}
  référentiel : terrestre, considéré galiléen

- bilan des forces extérieures appliquées au système :
  $\vec{P}$ son poids
  $\vec{F}$ la force exercée par le plateau sur l'objet de masse M

- Le système est à l'équilibre, donc d'après le principe de l'inertie, $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$
  $\Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$

  En projetant cette relation sur l'axe (Oz), on obtient :
  $P_z + F_z = 0$
  $\Rightarrow \quad -P + F = 0$
  $\Rightarrow \quad -Mg + k\,(D_0 - D) = 0$
  $\Rightarrow \quad Mg = k\,(D_0 - D)$
  $\Rightarrow \quad M = \dfrac{k}{g}\,(D_0 - D)$

1.3.2.



Du fait de la présence de la butée de hauteur h, l'armature supérieure mobile du condensateur ne peut descendre que d'une distance $e_0 - h$.
Comme le plateau se déplace de la même distance que l'armature mobile du condensateur, on en déduit que le plateau ne peut lui aussi descendre que d'une distance $e_0 - h$.
Ainsi, $D_0 - D = e_0 - h$

En reportant cela dans la relation de la question précédente, on en déduit que :

$$M_{max} = \frac{k}{g}\,(D_0 - D) = \frac{k}{g}\,(e_0 - h) = \frac{980}{9,8}\,(1,00\times10^{-2} - 0,50\times10^{-3}) = 0,95 \text{ kg}$$

2. Mesure de la masse à peser

2.1. D'après la loi des mailles, $u_R + u_c = E$

De plus, d'après la loi d'Ohm, $u_R = Ri \Rightarrow Ri + u_c = E$

Or $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_c)}{dt} = C\,\frac{du_c}{dt}$

On obtient donc : $RC\,\frac{du_c}{dt} + u_c = E$

2.2.

- Remarque **:**

  si $u_c = E\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, alors $\frac{du_c}{dt} = E \times (-1) \times \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

- $u_c = E\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ est solution de l'équation si : $RC\,\dfrac{du_c}{dt} + u_c = E$

$$\Rightarrow \text{ si } \frac{RCE}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}} + E\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = E$$

$$\Rightarrow \text{ si } \frac{RC}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}} + (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 1 \quad \text{car } E \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{ si } \left(\frac{RC}{\tau} - 1\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \quad \text{, quel que soit } t$$

$$\Rightarrow \text{ si } \frac{RC}{\tau} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{ si } \tau = RC$$

2.3. $u_c(\tau) = E\,(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}) = E\,(1 - e^{-1}) = 0{,}63 \times E = 0{,}63 \times 5{,}0 = 3{,}15$ V

La tension u_c atteint donc la valeur 3,15 V au bout d'une durée τ.

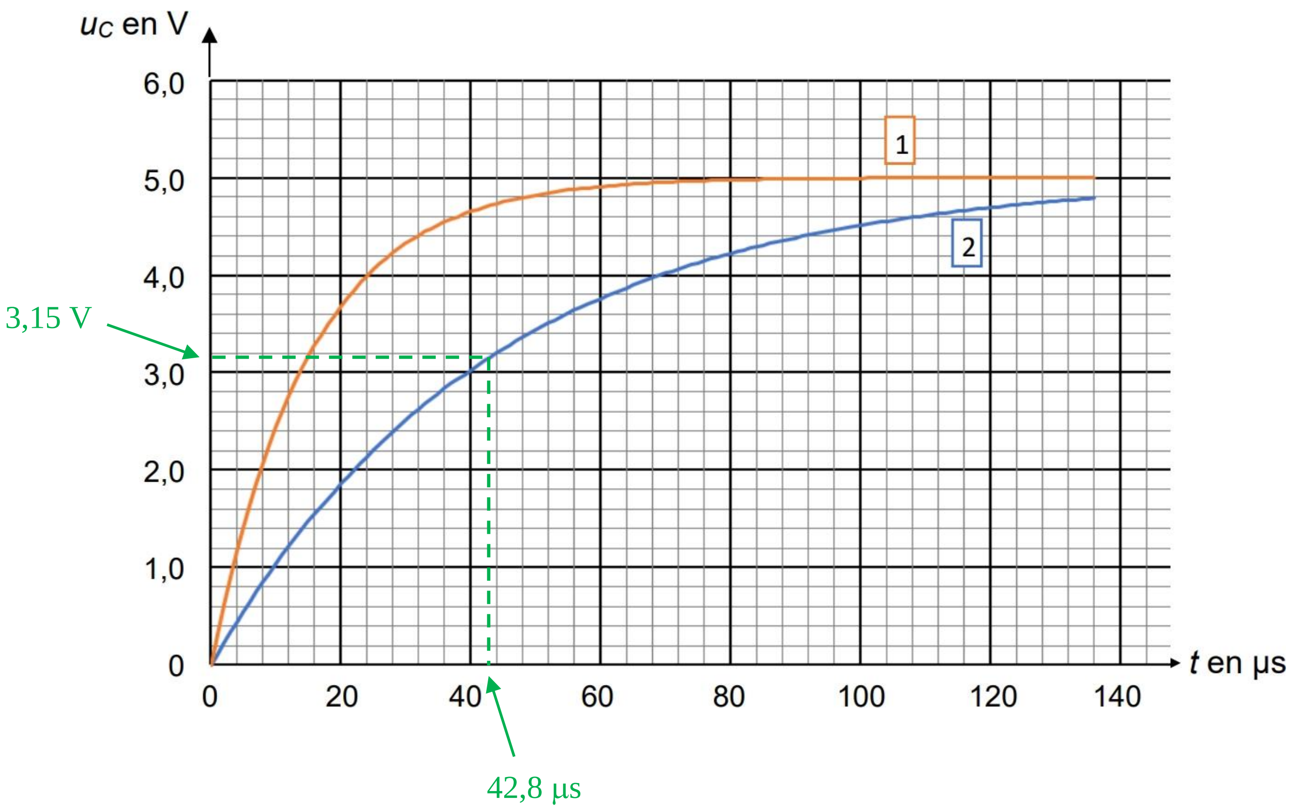
Sur le graphique, la tension u_c atteint 3,15 V plus rapidement pour la courbe 1.

$\Rightarrow \tau_1 < \tau_2$

$\Rightarrow RC_1 < RC_2$

$\Rightarrow C_1 < C_2$

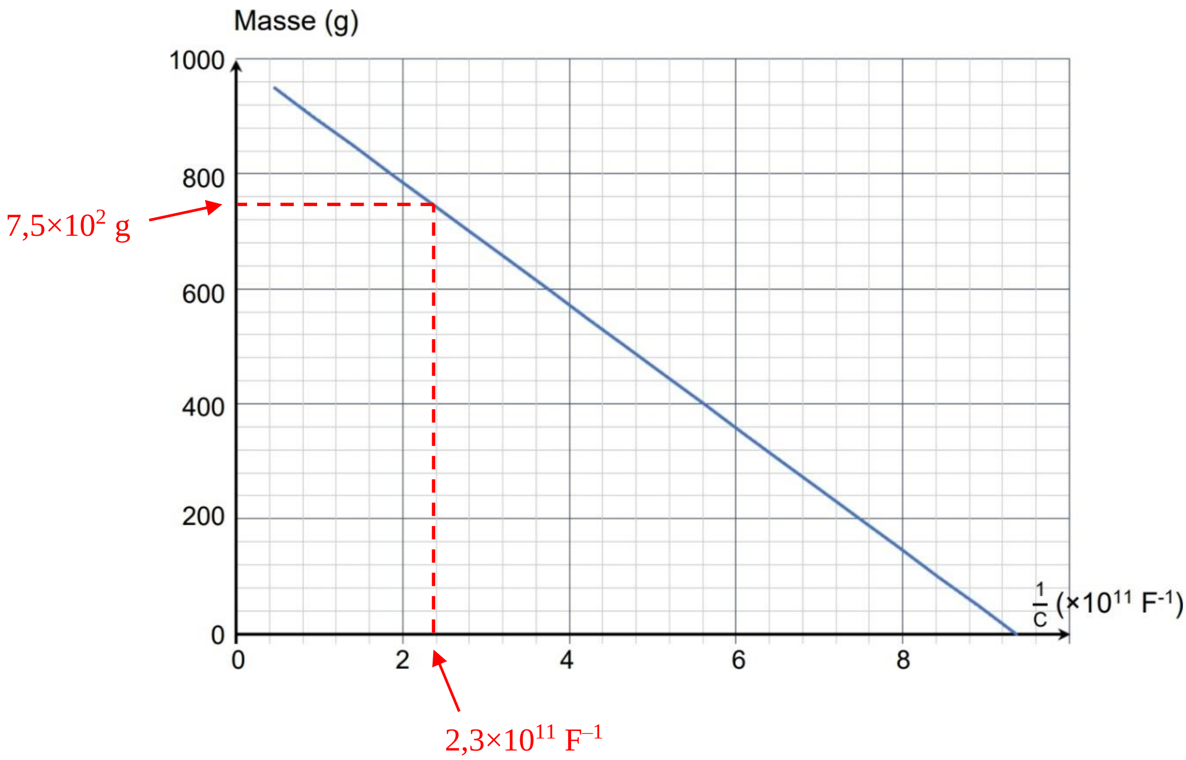
2.4.



D'après le graphique, $\tau_2 = 42{,}8$ µs

Or $\tau_2 = RC_2 \Rightarrow \dfrac{1}{C_2} = \dfrac{R}{\tau_2} = \dfrac{10\times10^{6}}{42{,}8\times10^{-6}} = 2{,}3\times10^{11}\ F^{-1}$

En reportant cette valeur sur le graphique 2, on obtient : $M_2 = 7{,}5\times10^{2}$ g



Partie 2. Accélérateur linéaire de particules

1. Modélisation par un condensateur plan

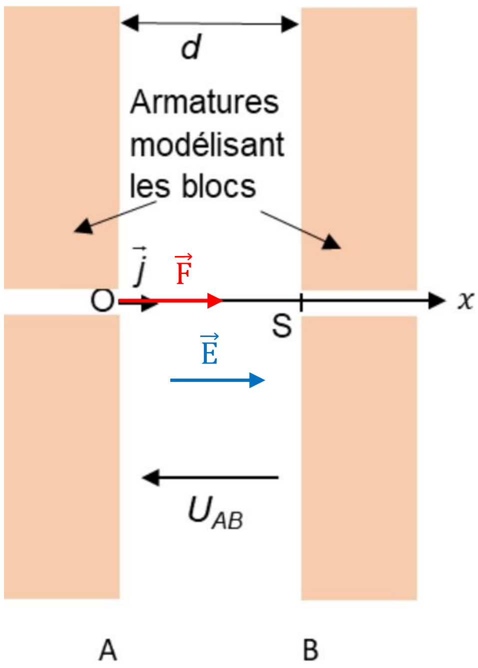
1.1.

- système : {proton}
  référentiel : terrestre, considéré galiléen

- bilan des forces extérieures appliquées au système :
  $\vec{F}_e$ la force électrique : $\vec{F}_e = q\,\vec{E} = e\,\vec{E}$
  Le poids est négligeable devant la force électrique.

  Entre les armatures d'un condensateur plan, le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire aux armatures.
  Si on veut que le proton, partant de O avec une vitesse initiale nulle arrive en S en étant accéléré, il faut que $\vec{F}$ soit dirigé dans le sens des x croissants (cf. schéma).
  Or $\vec{F} = e\,\vec{E}$, donc $\vec{E}$ doit aussi être perpendiculaire aux armatures, dans le sens des x croissants.
  Comme $\vec{E}$ est dans le sens des potentiels décroissants, on en déduit qu'il faut que $V_A > V_B$, donc que l'armature A soit chargée positivement et l'armature B, chargée négativement.

  Remarque :
  Il faut que $V_A > V_B$, donc que $U_{AB} = V_A - V_B > 0$, ce qui est en accord avec les données ($U_{AB} = 1{,}0$ kV)



1.2. $\vec{F} = q\,\vec{E} \Rightarrow F = |q| \times E = \dfrac{qU_{AB}}{d}$ car $q > 0$ et $U_{AB} > 0$

1.3. D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre O et S, $E_c(S) - E_c(O) = W_{OS}(\vec{F}_e)$

Or $E_c(S) = \dfrac{1}{2} m_p v_S^2$

$E_c(O) = \dfrac{1}{2} m_p v_O^2 = 0$ J (car le proton a une vitesse nulle en O)

$W_{OS}(\vec{F}_e) = qU_{AB}$

On obtient donc : $\dfrac{1}{2} m_p v_S^2 = qU_{AB}$

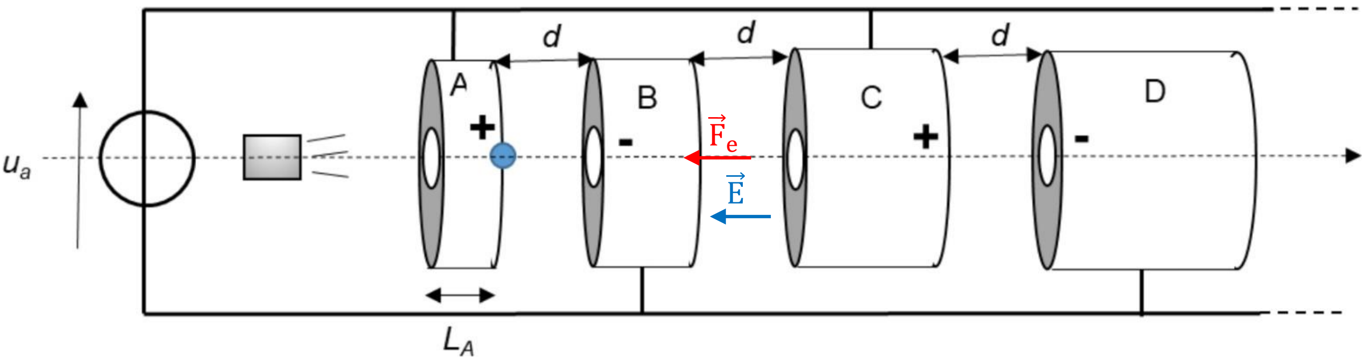
$\Rightarrow v_S^2 = \dfrac{2qU_{AB}}{m_p}$

$\Rightarrow v_S = \sqrt{\dfrac{2qU_{AB}}{m_p}} = \sqrt{\dfrac{2eU_{AB}}{m_p}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 1,60 \times 10^{-19} \times 1,0 \times 10^{3}}{1,67 \times 10^{-27}}} = 4,4 \times 10^{5}\ \text{m.s}^{-1}$

2. Constitution de l'accélérateur linéaire de particules

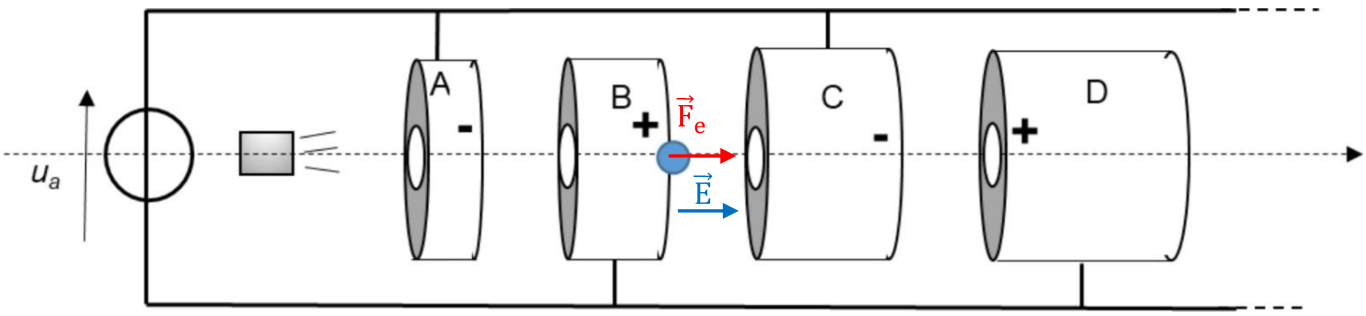
2.1.

- Si la tension entre B et C n'était pas modifiée, alors le champ $\vec{E}$ et donc la force $\vec{F}_e = e\,\vec{E}$ dans la zone entre B et C seraient orientés vers la gauche. Le proton serait alors décéléré, et non accéléré comme souhaité.



si le signe de U_a n'était pas modifié

- Il est donc nécessaire de changer le signe de la tension entre les blocs B et C quand le proton arrive dans la 2ème cavité afin que le sens du champ électrique soit modifié, et donc que le proton soit accéléré dans cette zone :



avec une modification du signe de U_a

2.2. Pour que le proton soit accéléré de façon optimale dans chaque cavité, il faut que le champ change de sens, donc que la tension change de signe à chaque fois que le proton entre dans une nouvelle cavité.

Comme la tension U_a change de signe tous les $\frac{T}{2} = \frac{5{,}0\times10^{-7}}{2} = 2{,}5\times10^{-7}$ s, il faut que le proton arrive dans une nouvelle cavité au bout de $\frac{T}{2} = 2{,}5\times10^{-7}$ s également.

Ainsi, pour que le proton soit accéléré de façon optimale dans chaque cavité, il doit parcourir la longueur d'une cavité plus la longueur d'un bloc en une durée $\Delta t = \frac{T}{2} = 2{,}5\times10^{-7}$ s.

2.3. Le proton accélère dans chaque cavité, donc si les systèmes {cavité-bloc} avaient une longueur constante, la durée du parcours dans chacun de ces systèmes serait de plus en plus petite.

Or cette durée doit être constante : $\Delta t = \frac{T}{2}$

Il faut donc que la longueur des systèmes {cavité-bloc} soit de plus en plus grande.
Comme la longueur des cavités est constante (d), c'est la longueur des blocs qui doit augmenter au fur et à mesure de l'avancée dans l'accélérateur linéaire.

2.4. À chaque passage dans une cavité, d'après le théorème de l'énergie cinétique,

$\Delta E_{c,1\ \text{cavité}} = W_{OS}(\vec{F}_e) = q\,|U_a| = eU_{a\ max}$

Donc $\Delta E_{c,1\ \text{cavité}} = 1{,}60\times10^{-19}\times1{,}0\times10^{3} = 1{,}6\times10^{-16}\ \text{J} = \dfrac{1{,}6\times10^{-16}}{1{,}60\times10^{-19}}\ \text{eV} = 1{,}0\times10^{3}\ \text{eV}$

Comme d'après l'énoncé, le gain en énergie cinétique est le même pour toutes les cavités, le nombre de cavités accélératrices nécessaires pour qu'un proton atteigne une énergie $E_{c,f}$ = 8,0 MeV est donc :

$N = \dfrac{E_{c,f} - E_{c,i}}{\Delta E_{c,1\text{cavité}}} = \dfrac{8{,}0\times10^{6} - 0}{1{,}0\times10^{3}} = 8{,}0\times10^{3}$