Mesure de la masse de Jupiter et du Soleil
(Bac Spécialité Physique-Chimie - Afrique - mars 2022)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

Exploitation des résultats expérimentaux

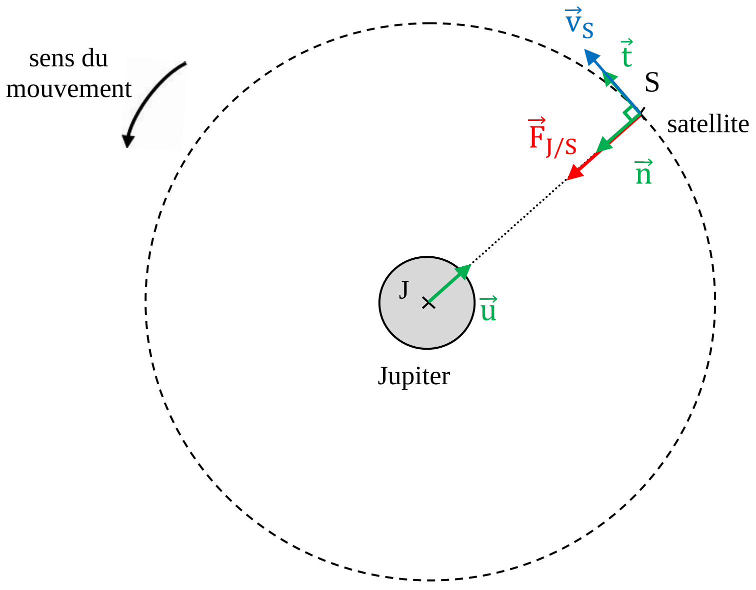
1. La courbe $T^2 = f(a^3)$ est une droite passant par l'origine, donc T^2 est proportionnel à a^3 : $T^2 = k \times a^3$, où k est le coefficient directeur de la droite.

Le rapport $\dfrac{T^2}{a^3}$ a donc la même valeur (k) pour les 4 satellites de Jupiter étudiés.

C'est la 3ème loi de Kepler, adaptée aux satellites de Jupiter.

Modélisation du mouvement d'un satellite de Jupiter

2.



$\vec{n} = -\vec{u}$

3. $\vec{F}_{J/S} = m\vec{a}_S \Rightarrow m\vec{a}_S = -\dfrac{GM_J m}{r^2}\,\vec{u}$

4. D'après la 2ème loi de Newton, $\Sigma\vec{F}_{ext} = m\vec{a}_S$
car le référentiel d'étude est considéré galiléen et la masse du système est constante.

$\Rightarrow \vec{F}_{J/S} = m\vec{a}_S \Rightarrow m\vec{a}_S = -\dfrac{GM_J m}{r^2}\,\vec{u}$

$\Rightarrow \vec{a}_S = -\dfrac{GM_J}{r^2}\,\vec{u}$

De plus, comme $\vec{n} = -\vec{u}$, on obtient : $\vec{a}_S = \dfrac{GM_J}{r^2}\,\vec{n}$

Or dans le cas d'un point ayant un mouvement circulaire de rayon r , $\vec{a} = \dfrac{dv_S}{dt}\,\vec{t} + \dfrac{v_S^2}{r}\,\vec{n}$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{dv_S}{dt} = 0 & \textit{(1)} \\ \dfrac{v_S^2}{r} = \dfrac{GM_J}{r^2} & \textit{(2)} \end{cases}$$

D'après l'équation (1), $\dfrac{dv_S}{dt} = 0 \Rightarrow v_S = \text{cte}$: le mouvement est uniforme

D'après l'équation (2), $\dfrac{v_S^2}{r} = \dfrac{GM_J}{r^2}$

$\Rightarrow v_S^2 = \dfrac{GM_J}{r}$

$\Rightarrow v_S = \sqrt{\dfrac{GM_J}{r}}$

5. La période de révolution T du satellite est la durée qu'il faut pour qu'il effectue 1 tour sur sa trajectoire autour de Jupiter.
S parcourt, à vitesse constante, la distance $\ell = 2\pi r$ pendant la durée $\Delta t = T$

$\Rightarrow v_S = \dfrac{\ell}{T} = \dfrac{2\pi r}{T}$

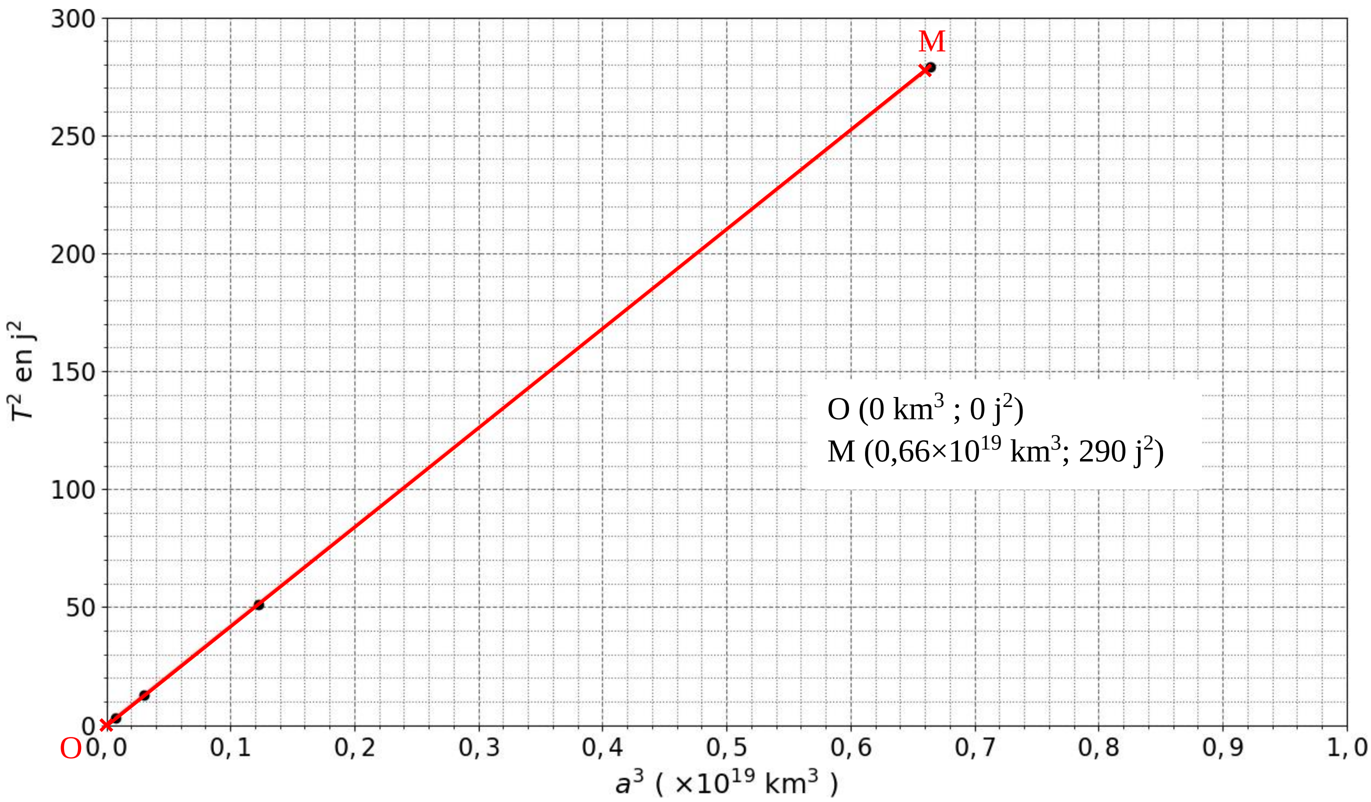
$\Rightarrow T = \dfrac{2\pi r}{v_S}$

$\Rightarrow T^2 = \dfrac{4\pi r^2}{v_S^2} = \dfrac{4\pi r^2}{\frac{GM_J}{r}} = \dfrac{4\pi r^3}{GM_J}$

$\Rightarrow \dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_J}$

$\Rightarrow \dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_J}$ car pour un cercle, a = r

6. Déterminons le coefficient directeur k de la droite $T^2 = f(a^3)$ (cf. question 1).



On obtient :

$$k = \frac{(T^2)_M - (T^2)_O}{(r^3)_M - (r^3)_O} = \frac{290 - 0}{0{,}66 \times 10^{19} - 0} = 4{,}4\times10^{-19}\ \text{j}^2.\text{km}^{-3} = 4{,}4\times10^{-19} \times 7{,}46\ \text{s}^2.\text{m}^{-3} = 3{,}3\times10^{-16}\ \text{s}^2.\text{m}^{-3}$$

Or d'après les questions 1 et 5, $k = \dfrac{4\pi^2}{GM_J}$

On en déduit que : $M_J = \dfrac{4\pi^2}{kG} = \dfrac{4\pi^2}{3{,}3\times10^{-16}\times 6{,}67\times10^{-11}} = 1{,}8\times10^{27}$ kg

Calculons l'écart relatif avec la valeur fournie dans l'énoncé :

$$e_R = \left| \frac{M_{J,exp} - M_{J,réf}}{M_{J,réf}} \right| = \left| \frac{1{,}8\times10^{27} - 1{,}8986\times10^{27}}{1{,}8986\times10^{27}} \right| = 0{,}051 = 5{,}1\ \%$$

La valeur trouvée expérimentalement est donc assez proche de la valeur fournie dans l'énoncé.

7. En adaptant la relation obtenue à la question 5. au cas de la Terre qui tourne autour du Soleil (en considérant en 1ère approximation que la trajectoire du centre de la Terre est circulaire), on obtient :

$$\frac{T_{Terre}^2}{r_{Terre}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

$$\Rightarrow M_S = \frac{4\pi^2 r_{Terre}^3}{GT_{Terre}^2} = \frac{4\pi^2 \times (150\times10^6\times10^3)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times(365{,}25\times24\times60\times60)^2} = 2{,}0\times10^{30}\ \text{kg}$$