Le jeu du cornhole
(Bac Spécialité Physique-Chimie - Métropole - mars 2021)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

1. Étude énergétique

1.1. ligne 15 : valeur v de la vitesse car $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$

ligne 16 : énergie cinétique E_c car $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

ligne 17 : énergie potentielle de pesanteur E_{pp}
car avec un axe vertical (Oz) vers le haut et le choix d'une origine de l'énergie potentielle pour z = 0, alors $E_{pp} = mgz$

ligne 18 : énergie mécanique E_m car $E_m = E_c + E_p$, donc ici, $E_m = E_c + E_{pp}$

1.2.1. $E_m = E_c + E_{pp}$, donc la courbe 1 correspond à l'énergie mécanique E_m
De plus, juste après le lancer :
- la vitesse diminue $\Rightarrow$ l'énergie cinétique E_c diminue $\Rightarrow$ E_c correspond à la courbe 2
- l'altitude du centre du sac augmente $\Rightarrow$ E_{pp} augmente $\Rightarrow$ E_{pp} correspond à la courbe 3

1.2.2. Sur le graphique, on remarque que l'énergie mécanique diminue au cours du temps.
Or la variation de l'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives (ici, les forces de frottement de l'air sur le sac).
On en déduit que l'action de l'air sur le sac n'est pas négligeable devant le poids.

1.2.3. $E_c\,(t = 0s) = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{2 \times E_c(t=0s)}{m}$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2 \times E_c(t=0s)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 17{,}8}{0{,}440}} = 9{,}0 \text{ m.s}^{-1}$$

<u>Remarque</u> :
On peut vérifier ce résultat grâce à un calcul direct à l'aide de v_x et v_z à t = 0 s :
$v_0 = \sqrt{v_x^2(t_0) + v_z^2(t_0)} = \sqrt{7{,}61^2 + 4{,}8^2} = 9{,}0 \text{ m.s}^{-1}$

1.2.4. $E_{pp}\,(t = 0s) = mgz_0 = mgH$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{E_{pp}(t=0s)}{mg} = \frac{3{,}75}{0{,}440 \times 9{,}81} = 0{,}869 \text{ m}$$

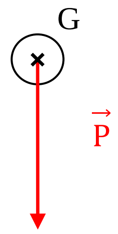
<u>Remarque</u> :
On peut retrouve bien la valeur indiquée à la ligne 6 du programme Python.

2. Étude du mouvement du sac après le lancer

2.1.

- système : {sac}
  référentiel : terrestre, considéré galiléen

- bilan des forces extérieures appliquées au système :
  $\vec{P}$ son poids
  On néglige l'action de l'air



- D'après la 2ème loi de Newton, $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_G$
  car le référentiel d'étude est considéré galiléen et q la masse du système est constante.

  $\Rightarrow \vec{P} = m\vec{a}_G$

  $\Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a}_G$

  $\Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$

- $\vec{a}_G \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_z \end{array} \right. = \vec{g} \left| \begin{array}{l} 0 \\ -g \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_G \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{array} \right.$

2.2.

- $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}_G}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_G \left| \begin{array}{l} v_x = C_1 \\ v_z = -gt + C_2 \end{array} \right.$

  Or $\vec{v}_G\,(t=0\text{ s}) \left| \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \end{array} \right. = \vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = v_0 \cos\alpha \\ C_2 = v_0 \sin\alpha \end{array} \right.$

  Donc $\vec{v}_G(t) \left| \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_z = -gt + v_0 \sin\alpha \end{array} \right.$

- $\vec{v}_G = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OG} \left| \begin{array}{l} x = (v_0 \cos\alpha)t + C_3 \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + C_4 \end{array} \right.$

  Or $\overrightarrow{OG}\,(t=0\text{ s}) \left| \begin{array}{l} C_3 \\ C_4 \end{array} \right. = \overrightarrow{OG}_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ H \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C_3 = 0 \\ C_4 = H \end{array} \right.$

Donc $\overrightarrow{OG}(t) \left| \begin{array}{l} x = (v_0 \cos\alpha)t \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + H \end{array} \right.$

2.3. $x = (v_0 \cos\alpha).t \;\Rightarrow\; t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$$\Rightarrow \quad z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + (v_0 \sin\alpha) \times \frac{x}{v_0 \cos\alpha} + H$$

L'équation de la trajectoire est donc : $z = -\dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha)\, x + H$

Cette équation est du type $z = Ax^2 + Bx + C$ (avec $A \neq 0$), donc c'est un arc de parabole d'axe (Oz).
De plus, comme $A < 0$ et que l'axe (Oz) est orienté vers le haut, sa concavité est tournée vers le bas.

2.4. Le joueur peut modifier la valeur v_0 de la vitesse, l'angle α et la hauteur initiale H.

2.5. Déterminons l'abscisse x_P à laquelle retombe le centre de masse du sac.
Au point de chute P, $z_P = 0$

$\Rightarrow \; -0{,}0842\, x_P^2 + 0{,}625\, x_P + 0{,}880 = 0$

$\Rightarrow \; x_P = -1{,}21$ m ou $x_P = 8{,}63$ m

impossible car le sac est lancé vers la droite, donc $x_P > 0$

Le centre de masse du sac tombe à 8,63 m, donc sur la planche car $8{,}00 \text{ m} < x_P < 8{,}91$ m.
Le joueur marque donc 1 point.

2.6.

- Commençons par déterminer les valeurs de H et α, identiques à celles du 1er lancer :
  Lors du 1er lancer, l'équation de la trajectoire était : $-0{,}0842\, x^2 + 0{,}625\, x + 0{,}880 = 0$
  (avec x exprimé en m)

  Or l'expression littérale est : $z = -\dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha)\, x + H$

  Par identification, on obtient : H = 0,880 m et $\tan\alpha = 0{,}625$, donc $\alpha = 32{,}0°$

- Calculons maintenant la vitesse v_0' pour que le centre de masse du sac tombe au centre du trou de la planche, c'est-à-dire au point de coordonnées ($x_c = 8{,}0 + 0{,}91 + 0{,}08 = 9{,}0$ m ; $z_c = 0$ m).

  Le point C doit appartenir à la trajectoire du centre de masse du sac , donc :

  $z_c = -\dfrac{g}{2v_0'^2 \cos^2\alpha} x_c^2 + (\tan\alpha)\, x_c + H$

$$\Rightarrow \quad \frac{g}{2v_0'^2 \cos^2 \alpha} \; x_c^2 \; = \; (\tan \alpha)\, x_c \; + H$$

$$\Rightarrow \quad v_0'^{\,2} \; = \; \frac{g\; x_c^2}{2(H + x_c \tan \alpha) \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \quad v_0' \; = \sqrt{\frac{g\; x_c^2}{2(H + x_c \tan \alpha) \cos^2 \alpha}} \; = \sqrt{\frac{9{,}81 \times 9{,}0^2}{2 \times (0{,}880 + 9{,}0 \times \tan 32{,}0) \cos^2 32{,}0}} \; = 9{,}2 \text{ m.s}^{-1} = 33{,}2 \text{ km.h}^{-1}$$

C'est une vitesse assez importante.
Pour réussir, il faut donc lancer suffisamment fort le sac, mais avec maîtrise pour être suffisamment précis.