Cave à vin
(D'après Bac Spécialité Physique-Chimie - Asie - mars 2021)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

1. D'après le 1er principe de la thermodynamique, $\Delta E_m + \Delta U = W + Q$
Or ici, $\Delta E_m = 0$ J et $W = 0$ J
On obtient donc : $\Delta U = Q$

2. $Q = \Phi \times \Delta t$, avec : $Q \rightarrow$ en J
$\Delta t \rightarrow$ en s
$\Phi \rightarrow$ en W

3. $\Delta U = Q$
Or $\Delta U = C\Delta\theta$ et $Q = \Phi \times \Delta t$
$\Rightarrow$ $C\Delta\theta = \Phi \times \Delta t$
$\Rightarrow$ $\Phi = C\,\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

4. De plus, d'après la loi phénoménologique de Newton, $\Phi = -hS\,(\theta - \theta_{air})$
On en déduit que : $C\,\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = -hS\,(\theta - \theta_{air})$

$\Rightarrow$ $C\,\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = -hS\,\theta + hS\,\theta_{air}$

$\Rightarrow$ $C\,\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} + hS\,\theta = hS\,\theta_{air}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} + \dfrac{hS}{C}\,\theta = \dfrac{hS}{C}\,\theta_{air}$

Faisons tendre Δt vers 0.

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$, donc on obtient : $\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{hS}{C}\,\theta = \dfrac{hS}{C}\,\theta_{air}$

5. Déterminons la solution de cette équation différentielle :

- solution générale de l'équation homogène :

  $\theta_h = \lambda\, e^{-\frac{hS}{C}\times t}$

- solution particulière de l'équation complète :
  Le second membre est une constante, donc on cherche une solution particulière constante (θ_p =K).
  Déterminons θ_p

  θ_p est solution de l'équation différentielle $\Rightarrow \dfrac{d\theta_p}{dt} + \dfrac{hS}{C} \times \theta_p = \dfrac{hS}{C} \times \theta_{air}$

  Or $\theta_p = K \Rightarrow \dfrac{d\theta_p}{dt} = 0$

  On obtient donc : $\dfrac{hS}{C} \times \theta_p = \dfrac{hS}{C} \times \theta_{air}$

  $\Rightarrow \theta_p = \theta_{air}$

- La solution générale de l'équation complète est donc :
  $\theta = \theta_h + \theta_p$

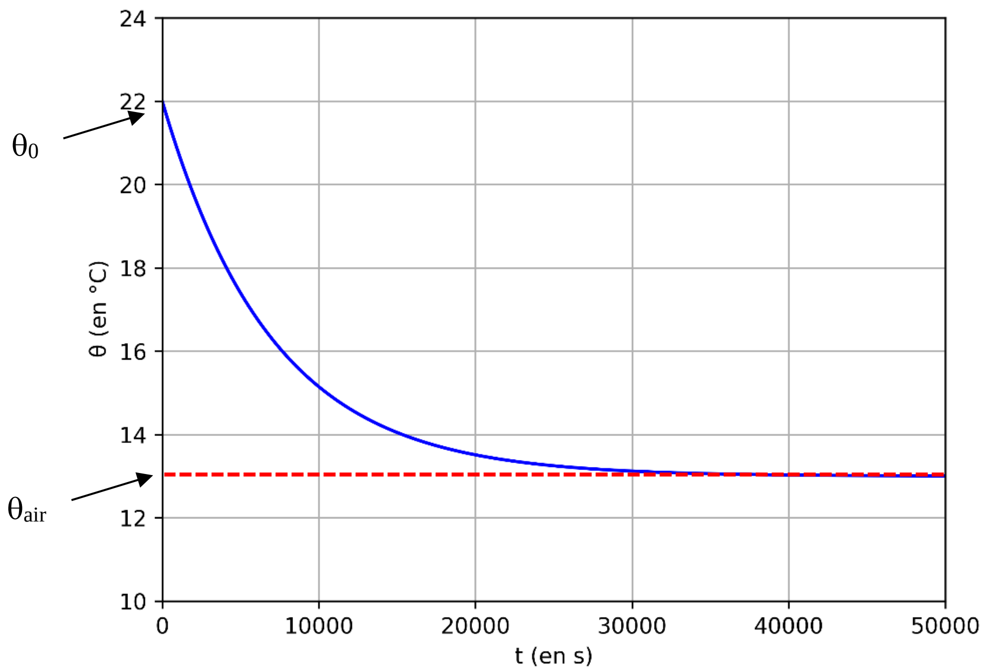
  $\Rightarrow \theta = \lambda\, e^{-\frac{hS}{C}\times t} + \theta_{air}$

- Déterminons λ en utilisant la condition initiale : à $t = 0$ s, $\theta = \theta_0$

  $$\left.\begin{array}{l} \theta\,(t = 0s) = \lambda\, e^{-\frac{hS}{C}\times t} + \theta_{air} = \lambda + \theta_{air} \\ \theta\,(t = 0s) = \theta_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + \theta_{air} = \theta_0 \Rightarrow \lambda = \theta_0 - \theta_{air}$$

  Finalement, $\theta\,(t) = (\theta_0 - \theta_{air}) \times e^{-\frac{hS}{C}\times t} + \theta_{air}$

6.



7. Notons t_1 l'instant auquel la bouteille de vin a une température $\theta' = 13{,}5$°C.

$\Rightarrow \quad \theta(t_1) = \theta'$

$\Rightarrow \quad \theta' = (\theta_0 - \theta_{air}) \times e^{-\frac{hS}{C}\times t_1} + \theta_{air}$

$\Rightarrow \quad \theta' - \theta_{air} = (\theta_0 - \theta_{air}) \times e^{-\frac{hS}{C}\times t_1}$

$\Rightarrow \quad e^{-\frac{hS}{C}\times t_1} = \dfrac{\theta' - \theta_{air}}{\theta_0 - \theta_{air}}$

$\Rightarrow \quad -\dfrac{hS}{C}\times t_1 = \ln\left(\dfrac{\theta' - \theta_{air}}{\theta_0 - \theta_{air}}\right)$

$\Rightarrow \quad t_1 = -\dfrac{C}{hS}\ln\left(\dfrac{\theta' - \theta_{air}}{\theta_0 - \theta_{air}}\right) = -\dfrac{3,25\times 10^{3}}{10\times 4,66\times 10^{-2}}\ln\left(\dfrac{13,5-13}{22-13}\right) = 2{,}0\times 10^{4}\text{ s} = 5{,}6\text{ h}.$