Mathématiques
(Bac STI2D – Polynésie - mars 2023)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

1. a) $f(x) = x\ e^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) Pour tout réel x appartenant à $[0;+\infty[$,
$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (-1)\, e^{-x} \times x = e^{-x}(1 - x)$

c) Considérons $x \in [0;+\infty[$

✓ $f'(x) = 0$ si $1 - x = 0$ (car $e^{-x} \neq 0$), donc si $x = 1$
On a alors $f(1) = e^{-1}$

✓ De plus, $e^{-x} > 0$, donc le signe de f ’(x) est celui de $1 - x$.
Ainsi $f'(x) > 0$ si $1 - x > 0$, donc si $x < 1$
et $f'(x) < 0$ si $1 - x < 0$, donc si $x > 1$

✓ Enfin, $f(0) = 0 \times e^0 = 0 \times 1 = 0$

✓ On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

2. a) On souhaite écrire $z_2 = -\sqrt{3} + i$ sous forme exponentielle : $z_2 = |z_2| \times e^{i\theta}$

$|z_2| = \left| -\sqrt{3} + i \right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\frac{z_2}{|z_2|} = \frac{z_2}{2} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Ainsi, une forme exponentielle possible est : $z_2 = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) $$Z = \frac{z_1}{z_2^3} = \frac{6\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{\left(2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^3} = \frac{6\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{8\,e^{i\frac{15\pi}{6}}} = \frac{3\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{4\,e^{i\frac{5\pi}{2}}}$$

Or $e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc $Z = \dfrac{3\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{4\,e^{i\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{3}{4} e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} = \dfrac{3}{4}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}$

Et finalement, $Z = \dfrac{3}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}$