

<b>Mathématiques</b> <b>(Bac STI2D – Polynésie - mars 2023)</b>
--

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie  
 © <http://b.louchart.free.fr>

1. a)  $f(x) = x e^{-x} = \frac{x}{e^x}$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = 0$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b) Pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$ ,  
 $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (-1)e^{-x} \times x = e^{-x}(1 - x)$

c) Considérons  $x \in [0; +\infty[$

✓  $f'(x) = 0$  si  $1 - x = 0$  (car  $e^{-x} \neq 0$ ), donc si  $x = 1$

On a alors  $f(1) = e^{-1}$

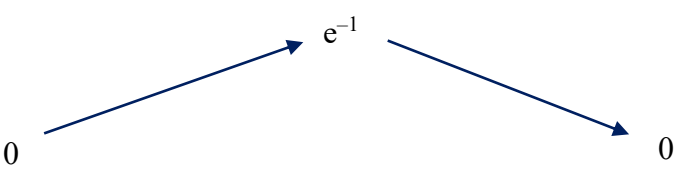
✓ De plus,  $e^{-x} > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $1 - x$ .

Ainsi  $f'(x) > 0$  si  $1 - x > 0$ , donc si  $x < 1$

et  $f'(x) < 0$  si  $1 - x < 0$ , donc si  $x > 1$

✓ Enfin,  $f(0) = 0 \times e^0 = 0 \times 1 = 0$

✓ On en déduit le tableau de variation de  $f$  :

x	0	1	+	∞
f'(x)	+	0	-	
f(x)	0	 $e^{-1}$		0

2. a) On souhaite écrire  $z_2 = -\sqrt{3} + i$  sous forme exponentielle :  $z_2 = |z_2| \times e^{i\theta}$

$$|z_2| = \left| -\sqrt{3} + i \right| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{z_2}{|z_2|} = \frac{z_2}{2} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Ainsi, une forme exponentielle possible est :  $z_2 = 2 e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$\text{b) } Z = \frac{z_1}{z_2^3} = \frac{6 e^{i\frac{\pi}{4}}}{\left(2 e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^3} = \frac{6 e^{i\frac{\pi}{4}}}{8 e^{i\frac{15\pi}{6}}} = \frac{3 e^{i\frac{\pi}{4}}}{4 e^{i\frac{5\pi}{2}}}$$

$$\text{Or } e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}, \text{ donc } Z = \frac{3 e^{i\frac{\pi}{4}}}{4 e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{3}{4} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\text{Et finalement, } Z = \frac{3}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$