"Voyage dans la ceinture d'astéroïdes"
(Bac S – Métropole - septembre 2018)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie au Lycée Pierre de La Ramée de Saint-Quentin (02)

1. La propulsion ionique

1.1. Étude de l'ionisation du xénon

1.1.1. $E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{hc}{E} = \dfrac{6,63\times10^{-34}\times3,00\times10^{8}}{12,1\times1,60\times10^{-19}} = 1,03\times10^{-7}\ \text{m} = 103\ \text{nm}$

1.1.2. Elle appartient au domaine des ultraviolets.

1.2. L'accélération des ions xénon

1.2.1. $m = \dfrac{M(Xe)}{N_A} = \dfrac{131,3\times10^{-3}}{6,02\times10^{23}} = 2,18\times10^{-25}\ \text{kg}$

1.2.2. $W_{AB}(\vec{F}_e) = \vec{F}_e \cdot \overrightarrow{AB} = q\vec{E}\cdot\overrightarrow{AB} = eE\times d = eU$

1.2.3. D'après l'énoncé, $E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{F}_e)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}m v_B^2 - \dfrac{1}{2}m v_A^2 = eU$

La vitesse en A est considérée nulle, donc on obtient : $\dfrac{1}{2}m v_B^2 = eU$

$\Rightarrow v_B^2 = \dfrac{2eU}{m}$

$\Rightarrow v_B = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$

1.2.4. $v_B = \sqrt{\dfrac{2\times1,60\times10^{-19}\times300}{2,18\times10^{-25}}} = 2,10\times10^{4}\ \text{m.s}^{-1}$

Cette vitesse est élevée, mais inférieure à $\dfrac{c}{10}$, donc on peut bien utiliser les lois de la mécanique classique pour étudier ce phénomène.

1.3. Principe de la propulsion par réaction de la sonde spatiale

1.3.1. $\vec{p}_1 = m\vec{v}_B$

$\vec{p}_2 = (M_S - m)\,\vec{v}_S$

1.3.2. système étudié : {moteur + atome de xénon}

D'après la 2ème loi de Newton, $\Sigma\,\vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

On considère que la sonde Dawn n'est soumise à aucune force extérieure, donc $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$

Ainsi, il y a conservation du vecteur quantité de mouvement du système {moteur + atome de xénon}.

Il reste égal au vecteur quantité de mouvement initial : $\vec{p} = \vec{0}$

Finalement, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$

1.3.3. $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{p}_2 = -\,\vec{p}_1 \;\Rightarrow\; p_2 = p_1 \;\Rightarrow\; (M_S - m)\,v_S = m\,v_B$

$\Rightarrow\; v_S = \dfrac{mv_B}{M_S - m}$

1.3.4. $v_S = \dfrac{2{,}18\times10^{-25}\times2{,}1\times10^{4}}{1240-2{,}18\times10^{-25}} = 3{,}7\times10^{-24}\ \text{m.s}^{-1}$

Cette valeur est extrêmement faible.
Un moteur n'émettant qu'un atome de xénon ne permettrait pas de propulser la sonde de façon satisfaisante.

1.3.5. Le moteur consomme 3,3 mg de xénon par seconde.
Comme la sonde en a une réserve de 450 kg, le moteur pourra fonctionner pendant

$\Delta t = \dfrac{450\times10^{3}}{3{,}3\times10^{-3}} = 1{,}4\times10^{8}$ s, c'est-à-dire 4 ans et 4 mois.

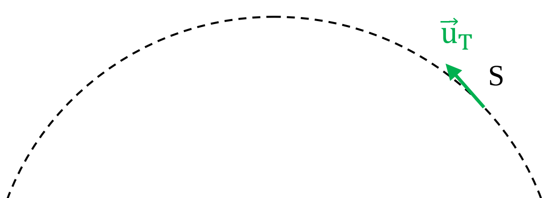
1.3.6. Le xénon est inerte (contrairement au sodium, au mercure et au césium), et il a une énergie d'ionisation plus faible que celles de l'argon et du krypton.

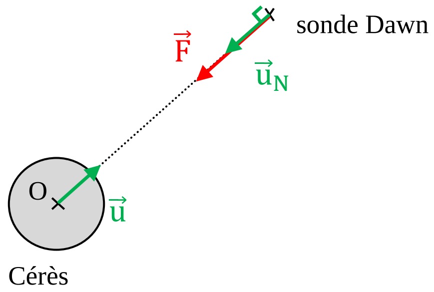
2. L'astéroïde Cérès

2.1. Force gravitationnelle exercée par l'astéroïde Cérès sur la sonde Dawn :

$$\vec{F}_{C/S} = -\frac{GM_CM_S}{r^2}\,\vec{u}$$

direction : droite (CS)
sens : de S vers C
valeur : $F_{C/S} = \dfrac{GM_CM_S}{r^2}$





$\vec{u}_N = - \vec{u}$

$\vec{u}_{TS}$

2.2.

- système : {sonde Dawn, assimilée à un objet ponctuel}
  référentiel : "cérésocentrique", considéré galiléen

- D'après la 2ème loi de Newton, dans un référentiel galiléen, $\Sigma \vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

  Or $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d(M_C\vec{v})}{dt} = M_C \dfrac{d\vec{v}}{dt} = M_C\, \vec{a}$

  car M_C ne dépend pas de t

  $\Rightarrow \vec{F}_{C/S} = M_C\, \vec{a} \Rightarrow M_C\, \vec{a} = - \dfrac{GM_CM_S}{r^2}\, \vec{u}$

  $\Rightarrow \vec{a} = - \dfrac{GM_C}{r^2}\, \vec{u}$

  $\vec{u}_N = - \vec{u} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{GM_C}{r^2}\, \vec{u}_N$

  Or dans le cas d'un point ayant un mouvement circulaire de rayon r , $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\, \vec{u}_T + \dfrac{v^2}{r}\, \vec{u}_N$

  $$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = 0 & (1) \\ \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{GM_C}{r^2} & (2) \end{cases}$$

  D'après l'équation (1), $\dfrac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte$: le mouvement est uniforme

2.3. D'après l'équation (2), $\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{GM_C}{r^2}$

$\Rightarrow v^2 = \dfrac{GM_C}{r}$

$$\Rightarrow \ v = \sqrt{\frac{GM_C}{r}}$$

2.4.

- La période de révolution T de la sonde Dawn est la durée qu'il faut pour qu'elle effectue 1 tour sur sa trajectoire autour de Cérès.
  S parcourt, à vitesse constante, la distance $\ell = 2\pi r$ pendant une durée $\Delta t = T$

  $$\Rightarrow \ v = \frac{\ell}{T} = \frac{2\pi r}{T}$$

  $$\Rightarrow \ T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_C}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_C}}$$

- $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_C}} \ \Rightarrow \ T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_C} \ \Rightarrow \ \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_C}$

  $\frac{4\pi^2}{GM_C}$ ne dépend pas des caractéristiques de la sonde Dawn.

  C'est en accord avec la 3ème loi de Kepler (adaptée aux satellites de Cérès) :
  Pour tous les satellites de Cérès, le quotient du carré de la période de révolution T du satellite autour de Cérès par le cube du demi-grand axe de son orbite elliptique est le même :
  $\frac{T^2}{a^3}$ a la même valeur pour tous les satellites de Cérès

2.5. $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_C}$

$$\Rightarrow \ M_C = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (R+h)^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \times (470\times10^3 + 13500\times10^3)^3}{6,67\times10^{-11}\times(15\times24\times3600)^2} = 9,6\times10^{20}\ \text{kg}$$

Cette valeur n'appartient pas à l'intervalle de confiance fourni dans l'énoncé ($(9,46 \pm 0,04)\times10^{20}$ kg).
Le mouvement de la sonde autour de Cérès n'est donc sans doute pas parfaitement circulaire.