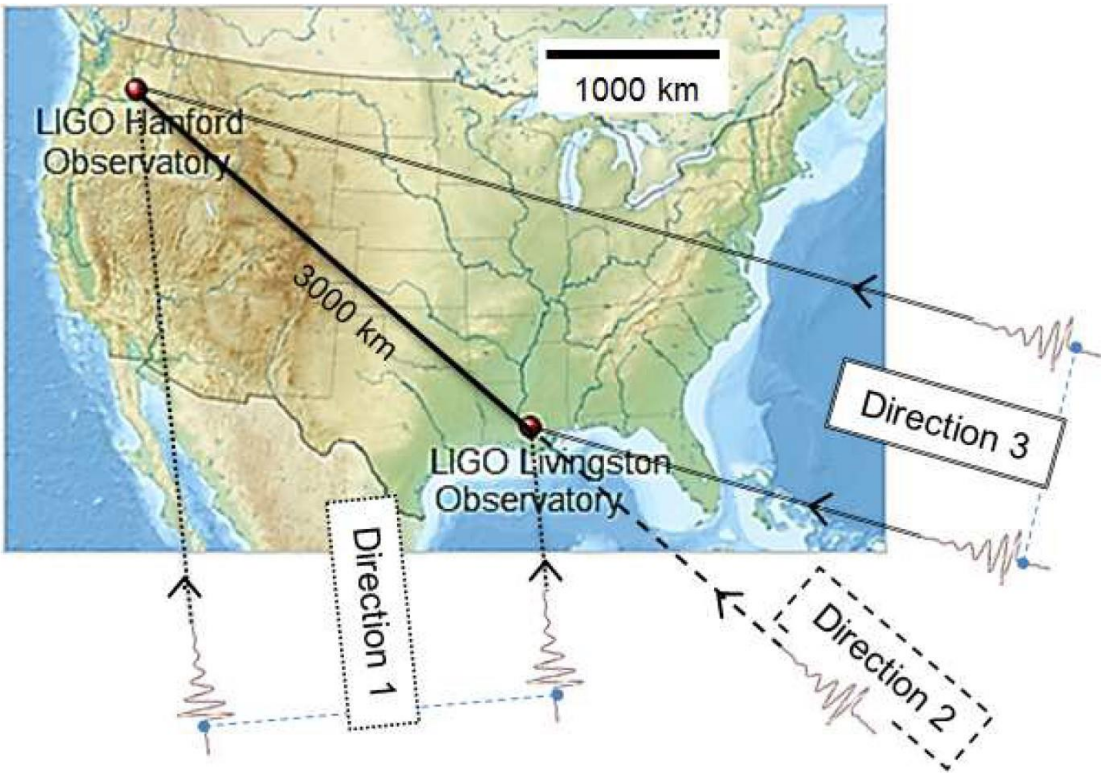
Les ondes gravitationnelles
(Bac S – Asie - juin 2017)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

1.1. Les ondes gravitationnelles ont parcouru cette distance en 1,3 milliards d'années, à la vitesse de la lumière dans le vide.
Une année-lumière étant la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année, on en déduit que la source des ondes gravitationnelles est située à 1,3 milliards d'années-lumière.

1.2.a.

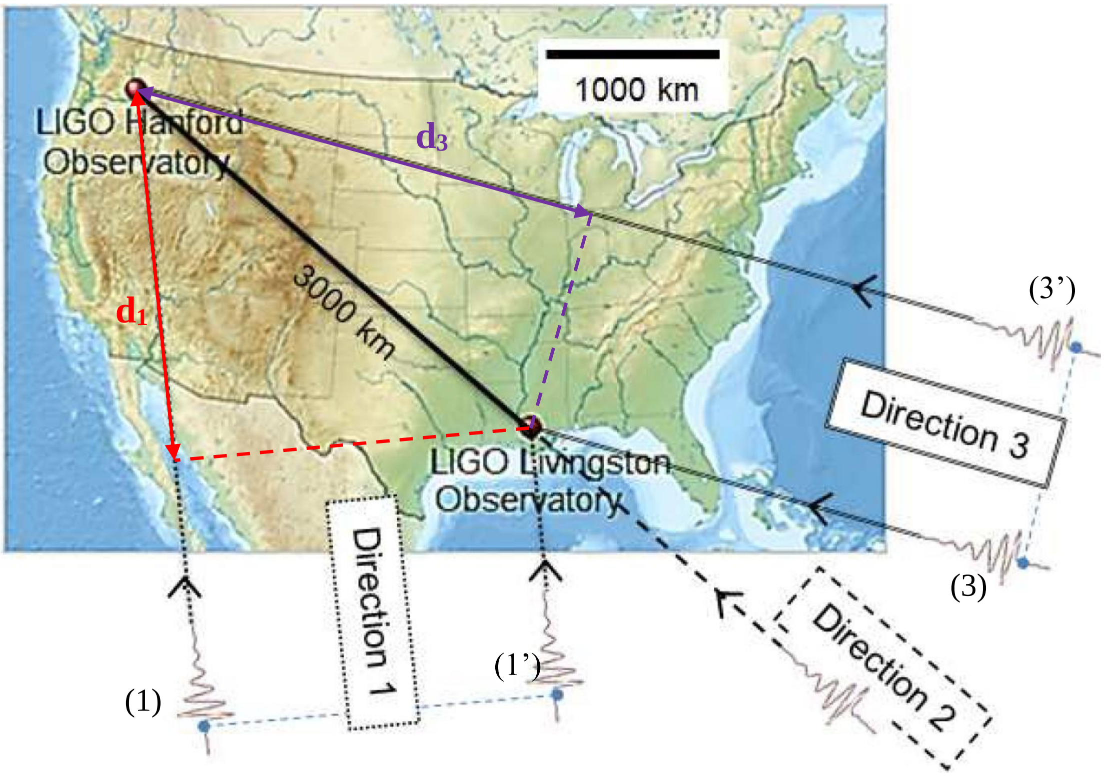


Calculons la durée Δt mise par les ondes pour parcourir d = 3000 km.

$$c = \frac{d}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{d}{c} = \frac{3000 \times 10^3}{3{,}00 \times 10^8} = 1{,}0 \times 10^{-2} \text{ s} = 10 \text{ ms}$$

Cette valeur est nettement supérieure à la valeur mesurée (7 ms). Une telle différence ne peut pas être due aux seules incertitudes de mesure. Les ondes gravitationnelles ne venaient donc pas de la direction 2.

1.2.b.



- Calculons les distances d_1 et d_3 indiquées sur le schéma.

	sur l'image	en réalité
échelle	6,9 cm	3000 km
distance supplémentaire (direction 1)	4,95 cm	$d_1 = ?$
distance supplémentaire (direction 3)	6,2 cm	$d_3 = ?$

On obtient : $d_1 = \dfrac{4{,}95 \times 3000}{6{,}9} = 2{,}2 \times 10^3$ km et $d_3 = \dfrac{6{,}2 \times 3000}{6{,}9} = 2{,}7 \times 10^3$ km

- Étudions maintenant les ondes arrivant dans les 2 centres LIGO et venant de la direction 1.
D'après le schéma, l'onde (1) (qui arrive à Hanford) a parcouru une distance d_2 supplémentaire par à l'onde (1') qui elle, arrive à Livingston.
L'onde (1') serait donc reçue à Hanford avec un retard de :
$$\Delta t_1 = \frac{d_1}{c} = \frac{2{,}2 \times 10^3 \times 10^3}{3{,}00 \times 10^8} = 7{,}2 \times 10^{-3} \text{ s} = 7{,}2 \text{ ms}$$

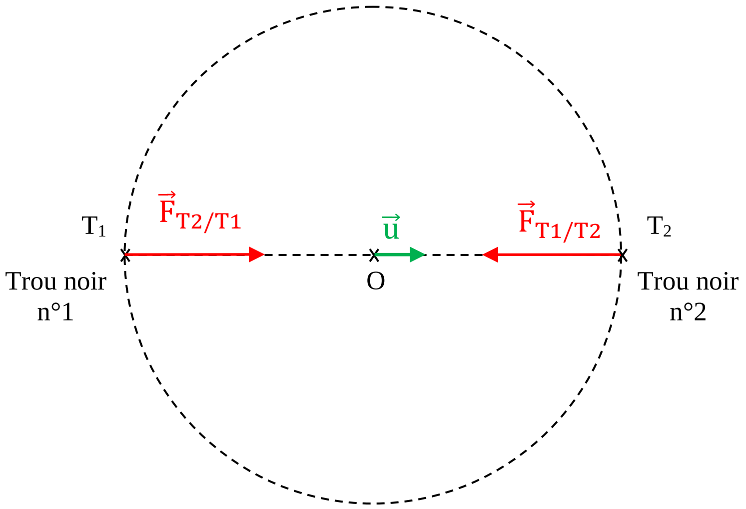
- Faisons de même avec les ondes arrivant dans les 2 centres LIGO et venant cette fois de la direction 3.

D'après le schéma, l'onde (3) (qui arrive à Hanford) a parcouru une distance d_3 supplémentaire par à l'onde (3') qui elle, arrive à Livingston.
L'onde (3') serait donc reçue à Hanford avec un retard de :

$$\Delta t_3 = \frac{d_3}{c} = \frac{2{,}7\times10^3\times10^3}{3{,}00\times10^8} = 9{,}0\times10^{-3}\ \text{s} = 9{,}0\ \text{ms}$$

- Entre les 2 autres directions proposées par l'énoncé, on choisit donc la direction 1 car le retard de 7,2 ms est celui qui est cohérent avec la mesure expérimentale (7 ms).

2.1.



$$F_{T2/T1} = F_{T1/T2} = \frac{G\times m\times m}{(2r)^2} = \frac{Gm^2}{4r^2}$$

2.2.

- système : {Trou noir n°2}
  référentiel : référentiel associé à un repère de centre O et dont les 3 axes sont orientés vers des étoiles lointaines, considérées fixes. Comme indiqué dans l'énoncé, ce référentiel est considéré galiléen

- bilan des forces extérieures appliquées au système :

  force gravitationnelle exercée par le trou noir n°1 sur le trou noir n°2 : $\vec{F}_{T1/T2} = -\dfrac{Gm^2}{4r^2}\,\vec{u}$

  On néglige les forces gravitationnelles dues aux autres astres

- D'après la 2ème loi de Newton, dans un référentiel galiléen, $\Sigma\vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

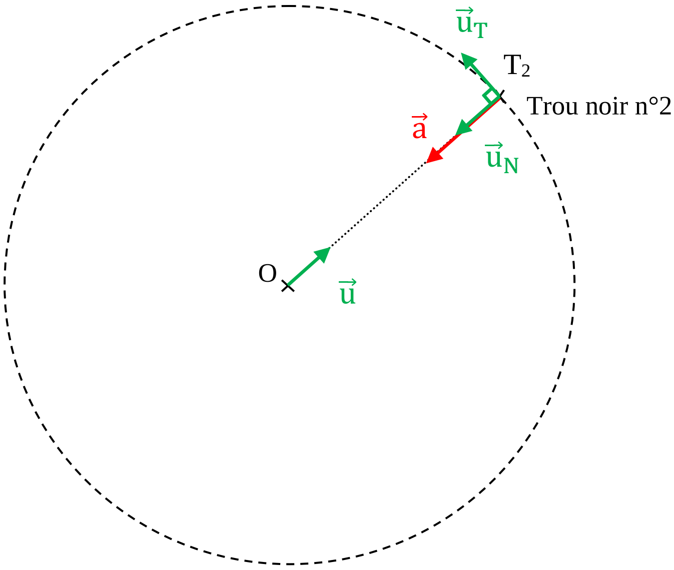
  Or $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a}$

  car m ne dépend pas de t

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{T1/T2} = m\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\,\vec{a} = -\frac{Gm^2}{4r^2}\,\vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{Gm}{4r^2}\,\vec{u}$$

- Introduisons le repère de Frénet $(T_2, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$:



$\vec{u}_N = -\vec{u}$

$\vec{u}_{TS}$

$$\vec{u}_N = -\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{Gm}{4r^2}\,\vec{u}_N$$

Or dans le cas d'un point ayant un mouvement circulaire de rayon r, $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{r}\,\vec{u}_N$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = 0 & \textit{(1)} \\[2ex] \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{Gm}{4r^2} & \textit{(2)} \end{cases}$$

(1) : $\frac{dv}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$ v est constante : le mouvement est uniforme

(2) $\Rightarrow \quad v^2 = \frac{Gm}{4r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Gm}{4r}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gm}{r}}$

En raisonnant de même avec le trou noir n°1, on obtiendrait un résultat similaire.

Ainsi, chaque trou noir a un mouvement circulaire uniforme et la valeur de sa vitesse est :

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gm}{r}}$$

2.3. La période de révolution T de chaque trou noir est la durée qu'il faut pour qu'il effectue un tour sur sa trajectoire.

Chaque trou noir parcourt, à vitesse constante, la distance $\ell = 2\pi r$ pendant une durée $\Delta t = T$.

$$\Rightarrow \ v = \frac{\ell}{T} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\Rightarrow \ T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gm}{r}}} = 4\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm}}$$

$$\Rightarrow \ T^2 = \frac{16\pi^2 r^3}{Gm}$$

$$\Rightarrow \ r^3 = \frac{Gm}{16\pi^2} \times T^2$$

2.4. D'après les données, la période des ondes gravitationnelles est égale à la demi-période de révolution des trous noirs : $T_{ondes} = \frac{T}{2}$

$$\Rightarrow \ T_{ondes} = \frac{1}{2} \times 4\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm}}$$

La fréquence des ondes gravitationnelles est donc :

$$f_{ondes} = \frac{1}{T_{ondes}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Gm}{r^3}}$$

Quand les deux trous noirs se rapprochent, r diminue. Donc comme G et m sont constantes, on en déduit que la fréquence des ondes gravitationnelles augmente.

2.5. Calculons la valeur de la vitesse de chaque trou noir à l'aide du modèle de la mécanique newtonienne utilisé dans les questions 2.2. et 2.3.

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gm}{r}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G \times 30M_S}{r}}$$

Or $r^3 = \frac{Gm}{16\pi^2} \times T^2 \quad \Rightarrow \ r = \sqrt[3]{\frac{Gm}{16\pi^2} \times T^2} = \sqrt[3]{\frac{G \times 30M_S}{16\pi^2 f^2}}$

$$\Rightarrow \ r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 30 \times 2{,}00 \times 10^{30}}{16\pi^2 \times 75^2}} = 1{,}7\times10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

On obtient donc :

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 30 \times 2{,}00 \times 10^{30}}{1{,}7 \times 10^5}} = 7{,}8\times10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

Comparons cette valeur à celle obtenue en tenant compte de la théorie de la relativité générale

$$v_{rel.gén.} = \frac{c}{4} = \frac{3,00 \times 10^8}{4} = 7,5 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

L'écart relatif vaut :

$$e_R = \left| \frac{v - v_{rel.gén.}}{v_{rel.gén.}} \right| = \left| \frac{7,8 \times 10^7 - 7,5 \times 10^7}{7,5 \times 10^7} \right| = 0,04 = 4 \text{ \%}$$

La valeur obtenue est donc assez proche de celle obtenue en tenant compte de la relativité générale. Ainsi, dans ce cas, les lois de la mécanique newtonienne donnent une bonne approximation de la vitesse des trous noirs.