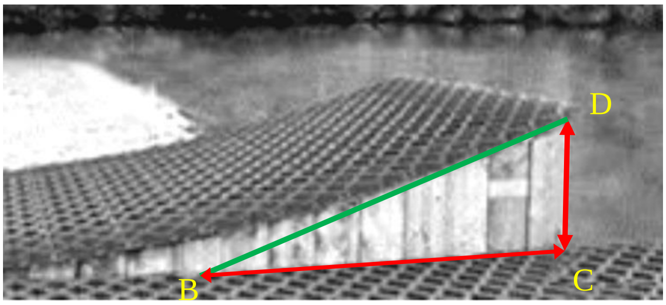
"Water jump"
(Bac S – Amérique du Sud – novembre 2017)

Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

Partie 1 : étude énergétique du skieur sur le tremplin

1.1.



$$\tan \varphi = \frac{CD}{BC} = \frac{1{,}75}{4{,}8} = 0{,}36 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 20°$$

1.2. $\varphi = 20°$, donc d'après le tableau de données, il s'agit d'un tremplin débutant.

1.3. Le film d'eau à la surface du toboggan permet de diminuer les frottements.

Utilisation du tremplin débutant

1.4. $E_m(A) = E_c(A) + E_p(A)$

avec : $E_c(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 = 0$ J car le skieur part de A sans vitesse initiale

$E_p(A) = E_{pp}(A) = mgH$

$\Rightarrow \quad E_m(A) = mgH$

1.5.

- bilan des forces extérieures appliquées au système :
  $\vec{P}$ son poids
  $\vec{R}$ la réaction du support : $\vec{R} = \vec{R}_N$ car les frottements entre le skieur et le support sont négligés
  Les frottements avec l'air sont négligés

- Entre A et O, le travail de $\vec{R}_N$ est nul, donc seul le poids, qui est une force conservative, travaille.
  $\Rightarrow$ l'énergie mécanique se conserve entre A et O
  $\Rightarrow$ $E_m(O) = E_m(A)$

1.6.

- Déterminons $E_m(O)$
  $E_m(O) = E_c(O) + E_p(O)$
  avec : $E_c(O) = \frac{1}{2} m v_O^2$
  $E_p(O) = E_{pp}(O) = mgh$
  $\Rightarrow$ $E_m(O) = \frac{1}{2} m v_O^2 + mgh$

- $E_m(O) = E_m(A) \Rightarrow \frac{1}{2} m v_O^2 + mgh = mgH$
  $\Rightarrow \frac{1}{2} m v_O^2 = mg(H - h)$
  $\Rightarrow v_O^2 = 2g(H - h)$
  $\Rightarrow v_O = \sqrt{2g(H-h)} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times (3{,}5 - 0{,}85)} = 7{,}2 \text{ m.s}^{-1}$

Utilisation du tremplin médian

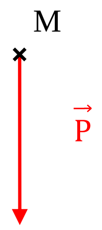
1.7. Pour un départ sur le tremplin débutant, $E_m(A) = mgH_1$
Pour un départ sur le tremplin médian (pour lequel $H_2 = 2H_1$), $E'_m(A) = mgH_2 = 2mgH_1 = 2\,E_m(A)$
Ainsi, quand il part du tremplin médian, son énergie mécanique vaut le double de celle qu'il a pour le tremplin débutant.

1.8. Pour les tremplins débutant et médian, H varie, mais h reste le même.
$v_O = \sqrt{2g(H-h)}$
v_O n'est pas proportionnel à H, donc si H double, v_O ne doublera pas.

Partie 2 : étude du mouvement du skieur après avoir quitté le tremplin

2.1.

- système : {skieur}
  référentiel : terrestre, considéré galiléen



- bilan des forces extérieures appliquées au système :
  $\vec{P}$ son poids
  Les frottements de l'air sur le projectile et la poussée d'Archimède sont négligés dans cette étude.

- D'après la 2[ème] loi de Newton, dans un référentiel galiléen, $\Sigma\ \vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

  Or : $\Sigma\ \vec{F}_{ext} = \vec{P}$

  et : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d(m\ \vec{v})}{dt} = m\ \dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\ \vec{a}$

  car m ne dépend pas de t

  $\Rightarrow\ \vec{P} = m\vec{a}$
  $\Rightarrow\ m\vec{g} = m\vec{a}$
  $\Rightarrow\ \vec{a} = \vec{g}$

2.2.

- $\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. = \vec{g} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -g \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{array} \right.$

- $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = C_1 \\ v_y = C_2 \\ v_z = -gt + C_3 \end{array} \right.$

  Or $\vec{v}$ (t=0 s) $\left| \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \right. = \vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_0 \cos\varphi \\ 0 \\ v_0 \sin\varphi \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = v_0 \cos\varphi \\ C_2 = 0 \\ C_3 = v_0 \sin\varphi \end{array} \right.$

  Donc $\vec{v}(t) \left| \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\varphi \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt + v_0 \sin\varphi \end{array} \right.$

- $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = (v_0 \cos \varphi)\, t + C_4 \\ y = C_5 \\ z = -\dfrac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \varphi)\, t + C_6 \end{array} \right.$

Or $\overrightarrow{OM}\ (t=0\text{ s}) \left| \begin{array}{l} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{array} \right. = \overrightarrow{OM}_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} C_4 = 0 \\ C_5 = 0 \\ C_6 = 0 \end{cases}$

Donc $\overrightarrow{OM}(t) \left| \begin{array}{l} x = (v_0 \cos \varphi)\, t \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \varphi)\, t \end{array} \right.$

<u>Partie 3 : application à l'entraînement pour les skieurs durant l'été</u>

3.1. Quand le skieur atteint le sommet de la trajectoire, z est maximal $\Rightarrow \dfrac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow v_z = 0\ \text{m.s}^{-1}$

3.2. $v_z\,(t_{max}) = 0$

Or d'après la question 2.2., $v_z\,(t_{max}) = -\,g \times t_{max} + v_O \sin \varphi$

On en déduit que : $-\,g \times t_{max} + v_O \sin \varphi = 0$

$\Rightarrow\ g \times t_{max} = v_O \sin \varphi$

$\Rightarrow\ t_{max} = \dfrac{v_0 \sin \varphi}{g}$

3.3. $z_{max} = z\,(t_{max}) = -\dfrac{1}{2} g\, t_{max}^2 + (v_O \sin \varphi)\, t_{max}$

En remplaçant t_{max} par l'expression obtenue à la question précédente, on trouve :

$z_{max} = -\dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{v_0 \sin \varphi}{g} \right)^2 + (v_0 \sin \varphi) \times \dfrac{v_0 \sin \varphi}{g} = -\dfrac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} + \dfrac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g}$

$\Rightarrow\ z_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}$

3.4. D'après le schéma au début de l'exercice,

$H_{max} = h + z_{max} = h + \dfrac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} = 1{,}7 + \dfrac{5{,}9^2 \times (\sin 45)^2}{2 \times 9{,}81} = 2{,}6\ \text{m}$