Super héros en danger
(Bac S – Amérique du Nord - juin 2015)

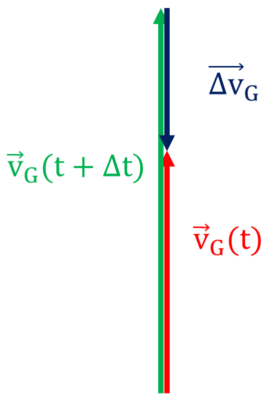
Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

1. Mouvement ascensionnel de Rocketeer

1.1. système : {Rocketeer et son équipement}
référentiel : terrestre, considéré galiléen

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_G}{\Delta t}$$

- <u>Au cours de la phase 1</u> :
  Traçons $\vec{v}_G$ aux instant t et $t + \Delta t$ (avec $\Delta t > 0$).



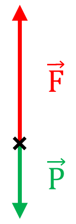
La direction de $\vec{a}_G$ est celle de $\overrightarrow{\Delta v_G}$, donc verticale.

Son sens est celui de $\dfrac{\Delta \vec{v}_G}{\Delta t}$, et comme $\Delta t > 0$, celui de $\overrightarrow{\Delta v_G}$,
donc vers le haut.

- <u>Au cours de la phase 2</u> :
  G a un mouvement vertical ascendant et la valeur de sa vitesse est constante. Il a donc un mouvement rectiligne uniforme.
  Ainsi $\vec{v}_G$ est constant et $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{0}$

1.2.1. En dehors de la force de poussée $\vec{F}$ (verticale vers le haut), le système est soumis à son poids $\vec{P}$ (vertical vers le bas).
On néglige la poussée d'Archimède et la force de frottement de l'air.

1.2.2. Pour que le système décolle, il faut que $\Sigma\ \vec{F}_{ext}$ soit dirigé vers le haut, donc que F > P
Or P = mg = 120×10 = 1200 N
Donc en utilisant la valeur de g fournie par l'énoncé, la seule proposition qui convient est 1600 N.



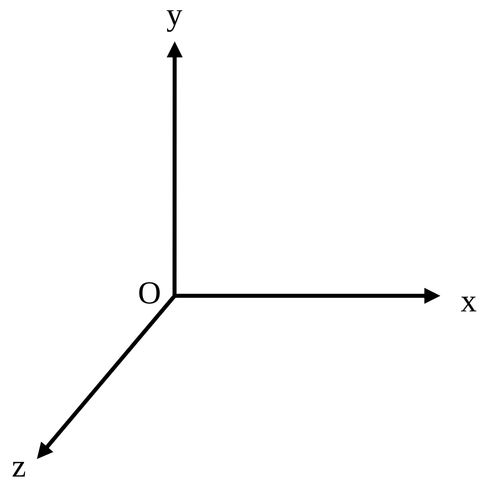
1.2.3. D'après le texte d'introduction du 1. , la force de poussée a une valeur égale au produit du débit massique de gaz éjecté par la vitesse d'éjection de ces gaz :
$F = D_f \times V_f$

Or d'après les données, $D_f = \dfrac{m_f}{\Delta t}$, où m_f est la masse de fluide éjecté pendant la durée Δt.

On obtient : $F = \dfrac{m_f}{\Delta t} \times V_f$

soit : $m_f = \dfrac{F \times \Delta t}{V_f} = \dfrac{1600 \times 3{,}0}{2 \times 10^3} = 2{,}4$ kg

1.2.4. On se place dans le repère (Oxyz) décrit ci-contre :



Remarque :
L'axe (Oy) ayant été choisi dans l'énoncé comme axe vertical ,et non (Oz), l'axe (Oz) sera alors choisi ici comme un axe du plan horizontal, contrairement aux notations habituellement utilisées.

- bilan des forces extérieures appliquées au système :
  $\vec{P}$ son poids
  $\vec{F}$ la force de poussée
  On néglige la poussée d'Archimède et la force de frottement de l'air.

- D'après la 2ème loi de Newton :
  Dans un référentiel galiléen, $\Sigma\ \vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

  Or : $\Sigma\ \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{F} = m_R\,\vec{g} + \vec{F}$

  et : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d(m_R\ \vec{v})}{dt} = m_R\ \dfrac{d\vec{v}}{dt} = m_R\ \vec{a}_G$

  car on néglige la variation de masse (due à l'éjection des gaz), donc m_R ne dépend pas de t

$$\Rightarrow\ m_R\vec{g} + \vec{F} = m_R\vec{a}_G$$

$$\Rightarrow\ \vec{a}_G = \vec{g} + \frac{1}{m_R}\times\vec{F}$$

$$\Rightarrow\ \vec{a}_G = \vec{g} + \frac{1}{m_R}\times\vec{F}$$

$$\Rightarrow\ \vec{a}_G = \vec{g}\left|\begin{array}{l}0\\-g\\0\end{array}\right. + \frac{1}{m_R}\times\vec{F}\left|\begin{array}{l}0\\F\\0\end{array}\right.$$

On obtient :

$$\vec{a}_G\left|\begin{array}{l}a_x = 0\\[2ex] a_y = -g + \dfrac{F}{m_R}\\[2ex] a_z = 0\end{array}\right.$$

- $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}_G}{dt} \Rightarrow \vec{v}_G\left|\begin{array}{l}v_x = C_1\\[2ex] v_y = \left(-g+\dfrac{F}{m_R}\right)\times t + C_2\\[2ex] v_z = C_3\end{array}\right.$

Or $\vec{v}_G\,(t=0\text{ s})\left|\begin{array}{l}C_1\\C_2\\C_3\end{array}\right. = \vec{v}_0\left|\begin{array}{l}0\\0\\0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}C_1 = 0\\C_2 = 0\\C_3 = 0\end{array}\right.$

Donc $\vec{v}_G\,(t)\left|\begin{array}{l}v_x = 0\\[2ex] v_y = \left(-g+\dfrac{F}{m_R}\right)\times t\\[2ex] v_z = 0\end{array}\right.$

- La valeur de la vitesse à l'issue de la phase 1 est donc :

$$v_1 = v_G\,(t_1 = 3{,}0\text{ s}) = \sqrt{v_x^2\,(t_1) + v_y^2\,(t_1) + v_z^2\,(t_1)}$$

Donc $v_1 = \sqrt{v_y^2\,(t_1)}$ car $v_x\,(t_1) = v_z\,(t_1) = 0\ m.s^{-1}$

$= v_y\,(t_1)$ car $v_y > 0$

$= \left(-10 + \dfrac{1600}{120}\right) \times 3{,}0$

$= 10\ m.s^{-1}$

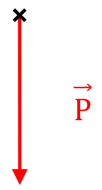
2. Problème technique

2.1. À $t = 0$ s, $\vec{v}_G = \vec{0}$, donc $v_y\,(t = 0) = 0$
Les propositions C et D ne sont donc pas correctes.

Lors de la chute, $\vec{v}_G$ est dirigé vers le bas, alors que l'axe (Oy) est orienté vers le haut, donc $v_y < 0$
La proposition B est donc fausse.

Par élimination, c'est donc la proposition A qui est correcte.

2.2.



- bilan des forces extérieures appliquées au système :
  $\vec{P}$ son poids
  On néglige les forces dues à l'action de l'air (poussée d'Archimède et frottements dus à l'air)

- D'après la 2ème loi de Newton :
  Dans un référentiel galiléen, $\Sigma\ \vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

  Or : $\Sigma\ \vec{F}_{ext} = \vec{P}$

  et : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d(m_R\ \vec{v})}{dt} = m_R \dfrac{d\vec{v}}{dt} = m_R\ \vec{a}$

  car m_R ne dépend pas de t

  $\Rightarrow\ \vec{P} = m_R\,\vec{a}$
  $\Rightarrow\ m_R\,\vec{g} = m_R\,\vec{a}$
  $\Rightarrow\ \vec{a} = \vec{g}$

- $\vec{a}_G \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. = \vec{g} \left| \begin{array}{l} 0 \\ -g \\ 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_G \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{array} \right.$

- $a_y = -g$
  Or $a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_y = -gt + C_1$

À $t = 0$ s, $\left.\begin{array}{l} v_y = C_1 \\ v_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = 0$

Donc $v_y(t) = -gt$

- $v_y = -gt$

  Or $v_y = \dfrac{dy}{dt} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + C_2$

  À $t = 0$ s, $\left.\begin{array}{l} y = C_2 \\ y = y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_2 = y_0$

  Donc $y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + y_0$, soit $y(t) = -5t^2 + 80$ (avec t en s et y en m)

2.3. Les phases d'ascension et de chute ayant eu lieu verticalement, Rocketeer retombera à l'emplacement du décollage.
Or d'après l'échelle indiquée sur le document, la distance entre ce point et le manoir est :

$d = \dfrac{10{,}75}{1{,}1} \times 1 = 9{,}8$ km

Déterminons l'instant t_2 où Rocketeer touche le sol.

$y(t_2) = 0 \Rightarrow -5\,t_2^2 + 80 = 0 \Rightarrow t_2^2 = \dfrac{80}{5} \Rightarrow t_2 = 4{,}0$ s

La valeur minimale de la vitesse moyenne à laquelle doit se déplacer Batman au volant de sa Batmobile pour sauver Rocketeer est donc :

$v_{m\,min} = \dfrac{d}{t_2} = \dfrac{9{,}8 \times 10^3}{4{,}0} = 2{,}4\times10^3 \text{ m.s}^{-1} = 2{,}4\times10^3 \times 3{,}6 \text{ km.h}^{-1} = 8{,}8\times10^3 \text{ km.h}^{-1}$

Cette vitesse ne peut être atteinte par la Batmobile, donc Batman ne pourra donc pas sauver Rocketeer.