La grêle
(Bac – Amérique du Nord – juin 2005)

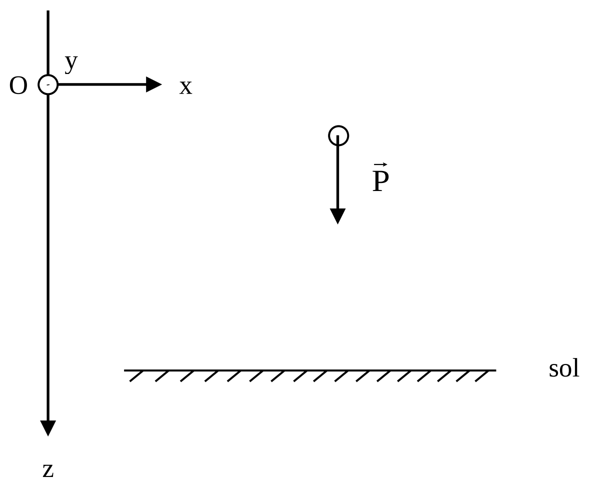
Corrigé réalisé par B. Louchart, professeur de Physique-Chimie

A. Chute libre

1.

- système : {grêlon}
- référentiel : terrestre, considéré galiléen

- bilan des forces extérieures appliquées au système :
  $\vec{P}$ son poids
  (remarque : pas d'autres forces extérieures : on suppose dans cette partie que le grêlon tombe en chute libre)



- 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$
  $\Rightarrow \vec{P} = m\vec{a}_G$
  $\Rightarrow m\vec{g}_0 = m\vec{a}_G$
  $\Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}_0$

- $\vec{a}_G = \vec{g}_0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ g_0 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{a}_G \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = g_0 \end{array} \right.$

- $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}_G}{dt} \Rightarrow \vec{v}_G \left| \begin{array}{l} v_x = C_1 \\ v_y = C_2 \\ v_z = g_0 t + C_3 \end{array} \right.$

Or $\vec{v}_G\,(t=0\ s)\ \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{vmatrix} = \vec{v}_0\ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \end{cases}$

Donc $\vec{v}_G(t)\ \begin{vmatrix} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = g_0 t \end{vmatrix}$

- $\vec{v}_G = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \Rightarrow \overrightarrow{OG}\ \begin{vmatrix} x = C_4 \\ y = C_5 \\ z = \dfrac{1}{2} g_0 t^2 + C_6 \end{vmatrix}$

Or $\overrightarrow{OG}\,(t=0\ s)\ \begin{vmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{vmatrix} = \overrightarrow{OG}_0\ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_4 = 0 \\ C_5 = 0 \\ C_6 = 0 \end{cases}$

Donc $\overrightarrow{OG}(t)\ \begin{vmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} g_0 t^2 \end{vmatrix}$

2. On note t_1 l'instant auquel le grêlon atteint le sol.

$\Rightarrow z(t_1) = h$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} g_0 t_1^2 = h$

$\Rightarrow t_1^2 = \dfrac{2h}{g_0}$

$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g_0}}$

Déterminons $v_z(t_1)$:

$v_z(t_1) = g_0 t_1 = g_0\sqrt{\dfrac{2h}{g_0}} = \sqrt{2g_0 h} = \sqrt{2\times 9{,}80\times 1500} = 171\ m.s^{-1}$

Calcul de $v_G(t_1)$:

$v_G = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = |v_z(t_1)| = 171\ m.s^{-1} = 171\times 3{,}6\ km.h^{-1} = 617\ km.h^{-1}$

Or dans le texte, il est indiqué que le grêlon peut atteindre une vitesse de 160 $km.h^{-1}$.
La valeur obtenue en supposant que c'est une chute libre n'est donc pas vraisemblable.
Le modèle de la chute libre n'est donc pas valable pour ce grêlon.

B. Chute réelle

1. $F = K.v^2 \Rightarrow K = \dfrac{F}{v^2} \Rightarrow$ K s'exprime en $\dfrac{N}{m^2.s^{-2}}$

Or $F = m\times a \Rightarrow N = kg.m.s^{-2}$

Finalement, K s'exprime en $\dfrac{kg.m.s^{-2}}{m^2.s^{-2}}$, c'est-à-dire en $kg.m^{-1}$

2.

- valeur de la poussée d'Archimède :

$F_A = P_{\text{fluide déplacé}} = m_{\text{fluide déplacé}} \times g_0 = \rho V g_0$

Or $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{D}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi D^3}{6}$, où D est le diamètre du grêlon

$\Rightarrow F_A = \dfrac{\pi D^3 \rho g_0}{6} = \dfrac{\pi \times (3{,}0\times 10^{-2})^3 \times 1{,}3 \times 9{,}80}{6} = 1{,}8\times 10^{-4}$ N

- valeur du poids du grêlon :

$P = mg_0 = 13\times10^{-3}\times9{,}80 = 0{,}13$ N

- comparaison :

$\dfrac{P}{F_A} = \dfrac{0{,}13}{1{,}8\times10^{-4}} = 710 \Rightarrow P = 710\, F_A$

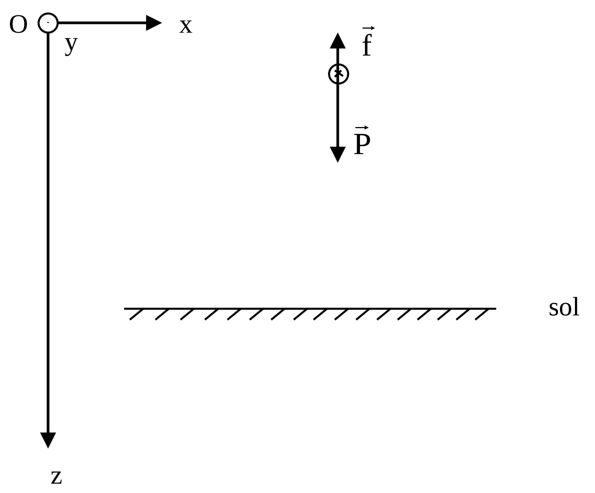
Le poids du grêlon est 710 fois plus grand que la poussée d'Archimède
$\Rightarrow$ on peut négliger la poussée d'Archimède devant le poids

3. a)

- système : {grêlon}
- référentiel : terrestre, considéré galiléen

- bilan des forces extérieures appliquées au système :

$\vec{P}$ son poids
$\vec{f}$ la force de frottement fluide



- 2ème loi de Newton : $\Sigma\,\vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

  $\Rightarrow\ \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}_G$

  On projette cette relation sur l'axe (Oz) :
  $P_z + f_z = m.a_z$

  $\Rightarrow\ mg_0 - f = m\,\dfrac{dv_z}{dt}$

  Or $f = K.v^2$
  et ici, $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2} = \sqrt{v_z{}^2} = |v_z| = v_z$ car au cours du mouvement étudié, $v_z \geqslant 0$

  On obtient donc : $mg_0 - Kv^2 = m\,\dfrac{dv}{dt}$

  $\Rightarrow\ \dfrac{dv}{dt} = g_0 - \dfrac{K}{m}\,v^2$

  Donc l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme :
  $\dfrac{dv}{dt} = A - B.v^2$, avec $A = g_0$ et $B = \dfrac{K}{m}$

b)

- $\dfrac{dv}{dt} = A - B.v^2$

  Or dans cette étude :
  $a = \sqrt{a_z{}^2} = a_z$ car au cours du mouvement étudié, $a_z > 0$
  $v = \sqrt{v_z{}^2} = v_z$ car au cours du mouvement étudié, $v_z > 0$

  $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$, donc ici, on obtient $a = \dfrac{dv}{dt}$
  On obtient donc : $a_4 = A - B\,v_4{}^2 = 9{,}80 - 1{,}56\times10^{-2}\times17{,}2^2 = 5{,}18\ m.s^{-2}$

- $v_{i+1} = v_i + a_i\times\Delta t \Rightarrow v_5 = v_4 + a_4\times\Delta t = 17{,}2 + 5{,}18\times0{,}5 = 19{,}8\ m.s^{-1}$

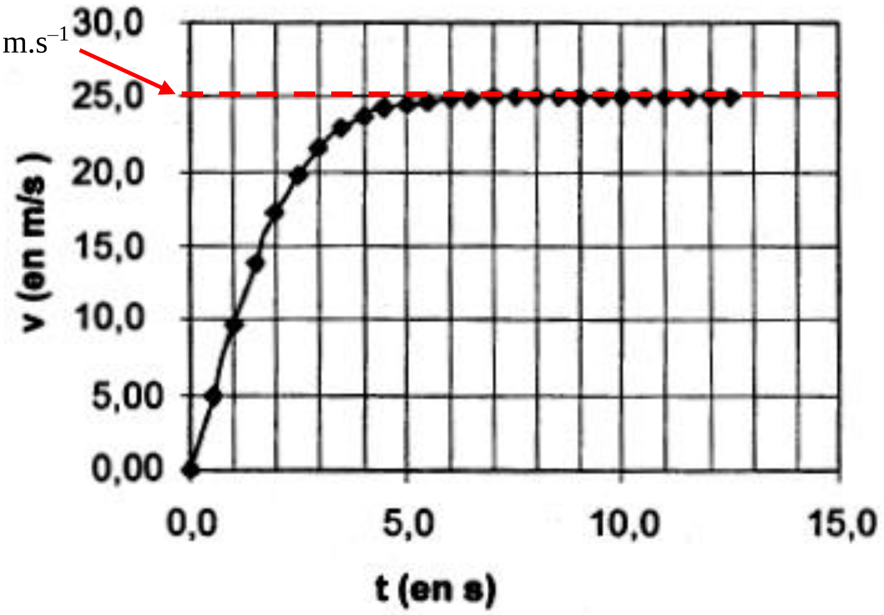
c) $\dfrac{dv}{dt} = A - B.v^2$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Quand } t \to +\infty,\ \ v \text{ tend vers } v_{lim} \\ \qquad\qquad\qquad \dfrac{dv}{dt} \text{ tend vers } 0\end{array}\right\} \Rightarrow 0 = A - B\times v_{lim}{}^2$$

$$\Rightarrow \quad v_{lim} = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{9{,}80}{1{,}56\times10^{-2}}} = 25{,}1 \text{ m.s}^{-1}$$

d)

v_{lim} = 25,0 m.s^{-1}



D'après le graphique, v_{lim} = 25,0 m.s^{-1} (cela correspond à la valeur théorique calculée à la question précédente, aux incertitudes de mesures près)