Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique et technologie (PT)

Annexe 1
Programme de mathématiques

Classe préparatoire PT
Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.
Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

Objectifs de formation

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :
- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :
- **chercher, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît comme un champ d'utilisation des concepts développés en algèbre linéaire et euclidienne d'une part, en analyse (calcul différentiel) d'autre part ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation et d'établir des liens avec les autres disciplines. Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme d'algèbre comprend deux sections. La première prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année, introduit la notion de déterminant en dimension quelconque et aboutit à une solide étude de la réduction : diagonalisation, trigonalisation. La deuxième, après quelques généralités sur les espaces préhilbertiens et le théorème de projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, étudie les isométries vectorielles d'un espace euclidien avec un accent sur les dimensions 2 et 3. Le théorème spectral est étudié du point de vue matriciel.

Le programme d'analyse est introduit par l'étude des fonctions vectorielles d'une variable réelle qui s'attache à relier les registres analytique et géométrique en développant une étude aussi bien affine que métrique des arcs paramétrés. L'étude des enveloppes insiste sur la vision géométrique et conduit à celle de la développée d'une courbe régulière.
La section relative aux séries numériques met l'accent sur la convergence absolue et limite l'étude des séries semi-convergentes au cas des séries alternées. Il constitue une introduction à l'étude des séries entières qui sont utilisées pour développer une fonction en série, calculer la somme de certaines séries numériques, trouver des solutions d'une équation différentielle, ou encore définir les séries génératrices en probabilités.
La section sur l'intégration introduit, pour les fonctions continues sur un intervalle quelconque, la notion d'intégrale généralisée et celle de fonction intégrable.
Le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonction et l'étude de la régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre concluent cette section.
La section sur les variables aléatoires discrètes propose une introduction a minima de la dénombrabilité en appui des notions générales de la théorie des probabilités, afin d'étendre l'étude menée en première année des variables aléatoires finies, ce qui permet d'élargir le champ des situations se prêtant à une modélisation probabiliste. La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants.
Cette section a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices.

L'étude des équations différentielles est limitée au cas des équations linéaires d'ordre 2, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'analyse. On indique quelques exemples de résolution : solutions développables en série entière, résolution à partir d'une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas.

La section sur les fonctions de deux ou trois variables vise à mettre en place des outils pour l'analyse et la géométrie et prévoit une étude à l'ordre deux des extremums des fonctions de deux variables. La section sur les courbes et les surfaces exploite, d'une part, les fonctions de deux ou trois variables (courbes du plan définies par une équation cartésienne, surfaces paramétrées ou définies par une équation cartésienne, courbes sur une surface), d'autre part, la géométrie euclidienne du plan et les matrices symétriques d'ordre 2 (étude des coniques).

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours. Le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes. En particulier, l'ordre de présentation des différentes sections ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Programme

Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A - Compléments d'algèbre linéaire

Cette section est organisée autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *introduire de nouveaux concepts : produit et somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, trace, hyperplans ;*
- *passer du point de vue géométrique au point de vue matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques en dimensions 2 et 3 et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels. Dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe. En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe. Dimension d'une somme directe.	Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Pour la somme de plus de trois sous-espaces, toute autre caractérisation est hors programme.
b) Sous-espaces stables	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. Matrice dans une base adaptée.	Les étudiants doivent savoir interpréter une forme matricielle par blocs en termes de stabilité d'un sous-espace et, inversement, traduire cette stabilité sous forme matricielle.
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
d) Hyperplans en dimension finie	
Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie, défini comme sous-espace admettant une droite comme supplémentaire. Équations d'un hyperplan. Si E est de dimension n, l'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n-p$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans.	Système d'équations d'un sous-espace vectoriel. Interprétation géométrique de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires.

B - Déterminants

Le déterminant est présenté dans sa version matricielle. L'interprétation géométrique en termes d'aire et de volume algébrique est faite via le produit mixte défini en première année. Les capacités attendues sont la connaissance et l'utilisation des propriétés du déterminant permettant un calcul simple via des opérations élémentaires. Tout excès de technicité est exclu et l'outil informatique est utilisé dès que le calcul s'avère trop lourd. Le vocabulaire des formes multilinéaires alternées, le groupe symétrique et les formules de Cramer sont hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Déterminant d'une matrice carrée	
Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes : *i.* det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ; *ii.* det est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ; *iii.* $\det(I_n) = 1$.	La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. Pour $n \in \{2, 3\}$, on fait le lien avec le produit mixte de deux ou trois vecteurs.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.	
Expression de $\det(\lambda A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	
Effet sur un déterminant des opérations élémentaires en colonnes.	Les étudiants doivent savoir calculer un déterminant par opérations élémentaires sur les colonnes.
Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.	Le déterminant d'une matrice carrée est nul si et seulement si la famille de ses colonnes est liée.
Déterminant d'un produit de matrices carrées.	La démonstration est hors programme.
Déterminant de l'inverse.	
Déterminant de la transposée.	La démonstration est hors programme. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.
Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.	La démonstration n'est pas exigible. La notion de comatrice est hors programme.
c) Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases.	La formule de changement de base pour un déterminant est hors programme.
Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.	Traduction sur le déterminant d'un endomorphisme des propriétés relatives au déterminant d'une matrice.

C - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Après avoir introduit le vocabulaire des éléments propres en dimension quelconque, cette partie s'intéresse de manière plus approfondie au cas de la dimension finie, et à la question de la diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
Tout développement sur les polynômes d'endomorphisme est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque.	Équation aux éléments propres $f(x) = \lambda x$.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{Sp}(f)$.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$. Notation $\mathrm{Sp}(A)$.
b) Polynôme caractéristique	
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $x \mapsto \det(x\, I_n - A)$ est polynomiale, unitaire, de degré n.	La démonstration n'est pas exigible pour $n \geqslant 4$.
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Notations χ_A, χ_f.
Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.	
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
c) Endomorphismes et matrices diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Interprétation : existence d'une base de vecteurs propres. Cas des projecteurs, des symétries.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E, si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de E.	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Cas où χ_f est scindé à racines simples. Traduction matricielle des résultats précédents relatifs aux endomorphismes.
d) Endomorphismes et matrices trigonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.	
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	La démonstration est hors programme. Traduction matricielle.

Contenus	Capacités & Commentaires
Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme. Expressions du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable en fonction de ses valeurs propres.

Espaces préhilbertiens et euclidiens

A - Structure préhilbertienne

En première année, la notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue géométrique en dimensions 2 et 3. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en petite dimension pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.	Expression $X^\top Y$.
Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Identité remarquable $\\|x+y\\|^2 = \\|x\\|^2 + \\|y\\|^2 + 2\langle x, y\rangle$.	Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité en dimension quelconque	
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux.	
Orthogonal d'un sous espace vectoriel.	Notation $F^\perp$.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale (finie) de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
d) Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan. Les étudiants doivent savoir déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F.

Contenus	Capacités & Commentaires
Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x, F)$. Application à la recherche du minimum.

B - Isométries d'un espace euclidien

Cette section vise les objectifs suivants :

- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, et les décrire en dimensions* 2 *et* 3 *en insistant sur les représentations géométriques;*
- *traiter la réduction des matrices symétriques réelles.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Isométries vectorielles	
Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Exemples : symétries orthogonales, cas particulier des réflexions. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.	
Groupe orthogonal d'un espace euclidien E.	Notation $\mathrm{O}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie vectorielle.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.	On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle. Isométrie vectorielle directe, isométrie vectorielle indirecte.	
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SO}(E)$.
c) Isométries vectorielles en dimension 2	
Orientation d'un plan euclidien de dimension 2. Base directe, base indirecte. Description des matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.	
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	
d) Isométries vectorielles en dimension 3	
Orientation d'un espace euclidien de dimension 3. Base directe, base indirecte. Orientation d'une droite, d'un plan d'un espace orienté. Rotation vectorielle d'axe orienté et d'angle donnés. Réflexion vectorielle. Matrices dans une base adaptée.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Réduction en base orthonormée d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	Les étudiants doivent savoir déterminer l'axe et l'angle de la rotation.
e) Matrices symétriques réelles	
Matrice symétrique réelle.	Notation $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme.
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.	
Théorème spectral : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $A = PDP^{-1}$).	A est dite orthogonalement diagonalisable. La démonstration est hors programme.

Fonctions vectorielles d'une variable réelle et courbes paramétrées

La section sur les fonctions vectorielles trouve une illustration naturelle dans l'étude des courbes paramétrées.
Il convient de formaliser des notions géométriques (courbe paramétrée, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.
Sur des exemples, l'étude d'une courbe paramétrée peut être amenée par la détermination d'un lieu géométrique.
La longueur d'une courbe paramétrée est définie par la formule intégrale et tout développement théorique est hors programme. On peut cependant présenter la définition géométrique à l'aide de figures.
Dans l'étude des propriétés métriques d'une courbe paramétrée, les problèmes de régularité que l'on peut rencontrer dans les calculs n'ont pas à être soulevés et ils n'ont pas l'importance de l'interprétation géométrique que l'on peut obtenir.
L'étude des propriétés métriques d'une courbe paramétrée et celle de l'enveloppe d'une famille de droites privilégient la vision géométrique plutôt que le recours à l'application de formules.
L'étude des courbes définies par une équation polaire est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3)	
Limite en un point. Continuité en un point. Continuité globale.	Caractérisation par les fonctions coordonnées.
Vecteur dérivé en un point.	Caractérisation par les fonctions coordonnées. Interprétation cinématique.
Fonction dérivée. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'une composée, d'un produit.	La dérivée du produit s'applique au produit d'une fonction numérique par une fonction vectorielle, au produit scalaire de deux fonctions vectorielles et au produit vectoriel de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Dérivées successives d'une combinaison linéaire, d'un produit (formule de Leibniz).	La formule du produit s'applique au produit d'une fonction numérique par une fonction vectorielle.
Formule de Taylor-Young.	La démonstration est hors programme.
Développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ au voisinage d'un point.	Les calculs sont faits à l'aide des fonctions coordonnées.
b) Courbes paramétrées du plan et de l'espace	
Courbe paramétrée par une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.	Notation $t \mapsto M(t)$.
Tangente en un point $M(t_0)$.	Sous réserve d'existence, la tangente est dirigée par $\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{v}(t)$ avec $\overrightarrow{v}(t)$ un vecteur unitaire dirigeant la corde $[M(t_0)M(t)]$.
Point régulier, courbe régulière.	
Vecteur tangent en un point régulier.	Détermination d'une équation ou d'un paramétrage de la tangente.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Orientation d'une courbe.	L'orientation d'une courbe régulière peut se faire par le choix d'un vecteur unitaire dirigeant la tangente ou par celui d'un sens de parcours de la courbe.

c) Étude des courbes paramétrées du plan

Étude locale en un point régulier ou stationnaire, tangente et position relative. Définition géométrique des points d'inflexion et de rebroussement.	Les étudiants doivent savoir utiliser des développements limités pour les études locales.
Branches infinies.	Asymptotes, branches paraboliques. Les étudiants doivent savoir utiliser des développements asymptotiques pour étudier les branches infinies.
Support d'une courbe paramétrée.	Construction à partir de tableaux de variations.

d) Propriétés métriques d'une courbe plane

Longueur d'une courbe paramétrée régulière.	Définition par la formule intégrale.
Abscisse curviligne, paramétrage par une abscisse curviligne pour une courbe régulière. Repère de Frenet $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$, normale.	
Courbure en un point régulier, formules de Frenet.	La courbure est définie par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N}$. Interprétation géométrique du signe de la courbure. La formule donnant la courbure à partir du déterminant de la vitesse et de l'accélération est hors programme.
Expression $\overrightarrow{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{\imath} + \sin(\alpha(t))\vec{\jmath}$.	Les problèmes liés à la régularité de α ne sont pas un attendu du programme.
Expression de la courbure $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$.	On interprète géométriquement la valeur de $\lvert\gamma\rvert$ sans démonstration formelle.
Point birégulier d'une courbe de classe $\mathscr{C}^2$.	
Rayon de courbure en un point birégulier. Centre de courbure. Cercle de courbure. Développée d'une courbe birégulière : ensemble des centres de courbure.	On interprète géométriquement le rayon et le cercle de courbure sans démonstration formelle.

e) Enveloppe d'une famille de droites

Enveloppe d'une famille de droites données par une représentation paramétrique $t \mapsto A(t) + \lambda\overrightarrow{u}(t)$ où A et $\overrightarrow{u}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$: on cherche une fonction λ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $t \mapsto A(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t)$ paramètre une courbe dont la tangente au point courant est dirigée par $\overrightarrow{u}(t)$. Caractérisation de la développée comme enveloppe des normales.	L'objectif est de privilégier une vision géométrique de la notion d'enveloppe et du procédé permettant de l'obtenir.

Séries numériques

Cette partie étend l'étude des séries à termes positifs vue en première année à celle des séries à termes réels et complexes. L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments sur les séries à termes réels	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes dans le cas d'une fonction monotone.
Théorème des séries alternées : si la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Encadrement de la somme.
b) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes	
Convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$.	Le critère de Cauchy est hors programme.
Une série numérique absolument convergente est convergente.	Somme d'une série absolument convergente.
Pour (u_n) et (v_n) deux suites complexes : – si $\lvert u_n\rvert \leqslant \lvert v_n\rvert$ à partir d'un certain rang, la convergence absolue de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$; – si $u_n = O(v_n)$, la convergence absolue de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$; – si $u_n \sim v_n$, la convergence absolue de $\sum v_n$ équivaut à celle de $\sum u_n$.	Le résultat s'applique en particulier lorsque $u_n = o(v_n)$.
Règle de d'Alembert.	
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	La démonstration n'est pas exigible.

Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*
- *étudier la régularité de la somme dans le cas d'une variable réelle ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières trouveront un cadre d'application dans la notion de fonction génératrice en probabilités et au détour d'exemples de résolutions d'équations différentielles linéaires.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Série entière de variable réelle, de variable complexe.	
Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme la borne supérieure dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert < R$, et elle diverge grossièrement si $\lvert z\rvert > R$.
Disque ouvert de convergence.	
Intervalle ouvert de convergence.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) : – si $\|a_n\| \leqslant \|b_n\|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$; – si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$; – si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.	Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$. Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	La limite du rapport $\dfrac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}$ peut être directement utilisée.

b) Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Fonction somme d'une série entière. Théorème de continuité : la fonction somme est continue sur son intervalle de définition.	La démonstration est hors programme. Cet énoncé contient le théorème d'Abel radial, qu'il est inutile de formaliser auprès des étudiants. En dehors de ce cadre, les études au bord de l'intervalle ouvert de convergence ne sont pas un attendu du programme.
Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence. La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme. Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	La démonstration est hors programme. Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$. La démonstration est hors programme.

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. Unicité du développement en série entière.	Formule de Taylor avec reste intégral.
Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0. Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert. Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	

Intégration sur un intervalle quelconque

L'objectif de cette section est triple :

- *définir, dans le cadre restreint des fonctions continues, les notions d'intégrale convergente et d'intégrabilité sur un intervalle qui n'est pas un segment ;*
- *énoncer dans un cadre plus général que celui des séries entières, un théorème d'intégration terme à terme ;*
- *étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés. De même, dans l'application des théorèmes de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si $\int_a^x f$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
Si f est positive sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
b) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.	La démonstration n'est pas exigible. L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans vérifier les hypothèses dans les cas de changements de variable usuels.
c) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables	
Intégrale absolument convergente.	
Une fonction f est dite intégrable sur I si elle est continue sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\mathrm{d}t$. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur I » et « l'intégrale $\int_I f$ converge absolument ». Fonction intégrable en b (resp. en a) si $I = [a,b[$ (resp. $I =]a,b]$).

Contenus	Capacités & Commentaires
La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La démonstration n'est pas exigible pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si f est continue, positive et intégrable sur I, et si $\displaystyle\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Pour f et g fonctions continues sur $[a,+\infty[$: – si $\lvert f\rvert \leqslant \lvert g\rvert$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f en $+\infty$. – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f en $+\infty$. – si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g en $+\infty$.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque. Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$.
Fonctions de référence : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, – intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ; – étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ en $+\infty$;	L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0^+ peut être directement utilisée. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés. Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+.

d) Intégration terme à terme

Soit $S : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe des fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ intégrables telles que : $\forall t \in I,\ S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$. Si la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert \,\mathrm{d}t$ est convergente, alors S est intégrable sur I et : $$\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme.

e) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par rapport à t.

Théorème de continuité : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	La démonstration est hors programme. Le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème de dérivation : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que : – pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I; – pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A; – il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. Le passage éventuel par une domination locale doit faire l'objet d'une question intermédiaire.

Variables aléatoires discrètes

On généralise l'étude des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini menée en première année aux variables aléatoires discrètes. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition;*
- *l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme;*
- *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilités, en loi, etc.) sont hors programme.*

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes, la notion de variable à densité est hors programme.

En première année, les étudiants se sont familiarisés avec les sommes finies, en particulier les sommes doubles. Dans le cadre du programme, la définition de l'espérance et le théorème de transfert font appel à la convergence absolue de familles décrites en extension.

Dans la pratique, lorsque $X(\Omega)$ n'est pas présenté sous la forme $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, on utilise les résultats suivants démontrés dans le cas fini :

- *on admet que la valeur de la somme d'une série absolument convergente est indépendante de l'ordre de sommation et d'un choix de regroupement de termes par paquets;*
- *on étend les définitions et propositions du programme dans le cas où les sommes mises en jeu sont indexées sur un produit, sans soulever de difficulté. Le théorème de Fubini est admis.*

L'usage de ces résultats est strictement réservé au contexte probabiliste et la notion de famille sommable est hors programme.

A - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble fini ou dénombrable est dit au plus dénombrable.	Les parties de $\mathbb{N}$ sont au plus dénombrables. Un ensemble est au plus dénombrable s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i,\ i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$ et les x_i distincts.
Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.	Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires

b) Univers, événements, variables aléatoires discrètes

Contenus	Capacités & Commentaires
Univers Ω, tribu $\mathscr{A}$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.	L'univers Ω n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.

c) Probabilité

Contenus	Capacités & Commentaires
Probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.	
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Sous-additivité : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	
Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.

d) Probabilités conditionnelles

Contenus	Capacités & Commentaires
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B définit une probabilité. Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	Si $(A_n)_n$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\|A_n)P(A_n)$. On rappelle la convention $P(B\|A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.
Formule de Bayes.	

e) Loi d'une variable aléatoire discrète

Contenus	Capacités & Commentaires
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$. On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.	On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.
Variable géométrique de paramètre $p \in]0,1[$: $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \sim \mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Notation $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation de la loi de Poisson comme la loi des événements rares.
Couple de variables aléatoires discrètes.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$.
Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

f) Événements indépendants

Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $$P(A\|B) = P(A).$$
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

g) Variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par : $$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$ Extension au cas de n variables aléatoires.
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.	On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une telle suite. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.	Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

B - Espérance et variance

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle

Variable aléatoire X à valeurs réelles d'espérance finie, espérance de X.	La variable aléatoire X à valeurs dans $\{x_n \| n \in \mathbb{N}\}$ est d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, la somme de cette série est l'espérance de X. Variable aléatoire centrée.
Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, égalité : $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$. Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Formule de transfert : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_n \| n \in \mathbb{N}\}$ et si f est définie sur cet ensemble et à valeurs réelles, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$.	La démonstration est hors programme. On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n-uplets de variables aléatoires.

Contenus	Capacités & Commentaires
Linéarité de l'espérance.	La démonstration est hors programme.
Positivité, croissance de l'espérance.	
Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et Y d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.	La démonstration est hors programme.
Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr.	
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et : $$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	La démonstration est hors programme. Extension au cas de n variables aléatoires.

b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance

Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, XY aussi et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$.	Cas d'égalité.
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$. Variable aléatoire réduite. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.
Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes.	
Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux décorrélées.	

c) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t)=\mathrm{E}\left(t^X\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,t^n.$$	La série entière définissant G_X est de rayon $\geqslant 1$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X)={G_X}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.

d) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon>0$, $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n}-m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$ où $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m=\mathrm{E}(X_1)$.	Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration. Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma=\sigma(X_1)$: $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n}-m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Équations différentielles et calcul différentiel

A - Équations différentielles scalaires d'ordre 2

L'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordres 1 et 2, abordée en première année, se poursuit par celle des équations scalaires à coefficients non constants d'ordre 2. On s'attache à développer à la fois les aspects théorique et pratique :

- *la forme des solutions ;*
- *le théorème de Cauchy linéaire ;*
- *la résolution explicite.*

Cette section favorise les interactions avec les autres disciplines scientifiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensemble des solutions	
Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.	Équation différentielle homogène associée.
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration est hors programme.
Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition des solutions. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	
b) Exemples de résolutions	
Exemples de recherches de solutions développables en série entière. Résolution dans le cas où on connaît une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas.	La résolution explicite de l'équation différentielle doit comporter des indications.

B - Fonctions de deux ou trois variables

Cette section est consacrée aux fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ pour $p = 2$ ou 3, sauf dans le paragraphe (g). Leur étude est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie.
La notion de différentielle est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Topologie de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	
Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Boule ouverte, boule fermée.	Interprétation de la norme en termes de distance.
Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées. Point intérieur, point adhérent à une partie.	Toutes les définitions sont illustrées par des figures.
b) Limite et continuité	
Limite en un point adhérent.	
Continuité en un point. Continuité sur une partie.	La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme. Si f est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$, alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Opérations sur les fonctions continues.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$ est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.

c) Dérivées partielles d'ordre 1

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point intérieur.	Notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.	Définition par l'existence et la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	Les démonstrations sont hors programme.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	La démonstration est hors programme.
Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Notation ∇f.

d) Dérivées partielles et composées

Dérivée selon un vecteur.	Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(a), u\rangle$.
Règle de la chaîne : dérivée de la fonction $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.	Interprétation comme dérivée le long d'une courbe γ donnée par $\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_p(t))$ et expression à l'aide du gradient : $(f\circ\gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$.
Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u,v) \mapsto f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$.	

e) Dérivées partielles d'ordre 2

Dérivées partielles d'ordre 2 en un point intérieur.	Notation $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert.	
Théorème de Schwarz.	La démonstration est hors programme. Exemples simples de résolutions d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordres.

f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Point critique d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Extremum local, extremum global. Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.	
Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation $H_f(a)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de deux variables de classe $\mathscr{C}^2$.	La démonstration est hors programme.
Nature d'un point critique.	Classification à l'aide du déterminant et de la trace de la matrice hessienne. Exemples de recherche de maximums ou minimums locaux, de points cols. Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.

g) Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ ($p \leqslant 3$, $n \leqslant 3$)

Limite en un point adhérent. Continuité en un point. Continuité sur une partie de $\mathbb{R}^p$.	Caractérisation par les fonctions coordonnées.
Dérivées partielles d'ordres 1 et 2. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert.	Expression coordonnée par coordonnée.

Courbes et surfaces

En application directe de la section sur les fonctions de deux ou trois variables, on présente la définition des courbes de $\mathbb{R}^2$ et surfaces de $\mathbb{R}^3$ par une équation cartésienne. Le passage (dans les deux sens) d'une équation cartésienne à un paramétrage peut être étudié sur des exemples, mais le cas général est hors programme.

A - Courbes implicites du plan

Les coniques sont définies à partir de foyer, excentricité et directrice, puis ramenées à leurs équations cartésiennes réduites (le théorème spectral pour les matrices symétriques est exploité pour obtenir une équation réduite à partir d'une équation générale). D'autres définitions géométriques (bifocale, par foyer et cercle directeur, comme sections planes de cônes de révolution...) peuvent être présentées, mais aucune connaissance n'est attendue des étudiants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Courbes du plan définies par une équation cartésienne	
Courbe du plan définie par une équation $f(x,y)=0$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Lignes de niveau de f.
Point régulier. Le gradient est normal à la tangente en un point régulier.	On admet que la courbe admet un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$. Détermination d'une équation de la tangente en un point régulier. Lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.
b) Coniques	
Définition des coniques par foyer, directrice et excentricité. Classification des coniques en fonction de l'excentricité, à partir d'une équation réduite.	Obtention d'une équation cartésienne réduite à partir de la définition géométrique. Les formules de calcul des éléments géométriques ne sont pas exigibles des étudiants et doivent être fournies au besoin.
Axes et centre de symétrie. Grand axe et petit axe d'une ellipse. Asymptotes d'une hyperbole.	Détermination de ces éléments géométriques à partir d'une équation réduite.
Une équation du type $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, définit une conique, éventuellement dégénérée.	Réduction de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ pour obtenir une équation réduite dans un repère orthonormé. Interprétation géométrique des droites propres. L'équation $xy=k$ définit une hyperbole dont les asymptotes sont les axes du repère.
Paramétrage des ellipses et des hyperboles à partir de leur centre, respectivement par les fonctions trigonométriques et hyperboliques.	Dans le cas de l'hyperbole, les deux branches sont paramétrées séparément.

B - Surfaces

La visualisation des surfaces grâce à un outil informatique ou par l'étude de sections planes sont privilégiées. Les exemples peuvent être choisis parmi les quadriques, mais la définition et la classification de celles-ci sont hors programme. De la même façon, l'étude des surfaces réglées peut s'appuyer sur des exemples usuels (cônes, cylindres, surfaces développables engendrées par les tangentes à une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$...) mais toute connaissance spécifique est hors programme. Toujours dans cet esprit, on peut fournir divers exemples de courbes tracées sur une surface (lignes de pente, contours apparents coniques ou cylindriques...). De manière générale, on attend des étudiants une certaine familiarité avec la représentation mathématique des surfaces en lien avec leurs propriétés géométriques (par exemple qu'ils sachent obtenir rapidement un paramétrage de surface réglée, une équation cartésienne de surface de révolution...) même si aucun point du programme ne précise théoriquement ces aspects.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Surfaces paramétrées	
Surface paramétrée par une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $(u, v) \mapsto M(u, v)$. Point régulier d'une surface paramétrée. Courbes coordonnées d'une surface paramétrée.	
Plan tangent en un point régulier.	Par définition, le plan est dirigé par les vecteurs tangents aux courbes coordonnées. Détermination d'une équation ou d'un paramétrage du plan tangent.
Vecteur normal à une surface en un point régulier, droite normale.	
b) Surfaces définies par une équation cartésienne	
Surface définie par une équation $f(x, y, z) = 0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$.	Surfaces de niveau de f.
Point régulier. Le gradient est normal au plan tangent en un point régulier.	On admet que la surface admet un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$. Détermination d'une équation du plan tangent en un point régulier. Lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux surfaces de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.
Courbe paramétrée tracée sur une surface.	Cas d'une surface paramétrée, d'une surface définie par une équation cartésienne.
Si Γ est une courbe tracée sur la surface Σ, et si M est un point régulier à la fois de Σ et de Γ, la tangente en M à Γ est incluse dans le plan tangent en M à Σ.	
c) Exemples de surfaces	
Surface d'équation $z = f(x, y)$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Interprétation géométrique de l'étude des points critiques de f effectuée dans la section « Fonctions de deux ou trois variables ».
Surface réglée. Génératrices.	Obtention d'un paramétrage d'une surface réglée à partir de la famille de ses génératrices. Le plan tangent en un point régulier contient la génératrice passant par ce point.
Surface de révolution. Axe, méridiennes, parallèles.	Dans le cas où l'axe est l'un des axes du repère, obtention d'un paramétrage ou d'une équation cartésienne. On met en évidence l'intérêt de l'utilisation de matrices de rotation.

d) Courbes de l'espace définies par un système d'équations cartésiennes

Courbe définie par l'intersection de deux surfaces données par une équation cartésienne. Un point M de la courbe définie par le système $$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$ est régulier si les gradients de f et g en M sont linéairement indépendants. Tangente en un point régulier. Cas des sections planes.	Lignes de niveau d'une surface. Sur des exemples, utilisation pour visualiser l'allure d'une surface.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Physique et technologie (PT)

Annexe 2
Programme de physique-chimie

Programme de physique-chimie de la voie PT

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique-chimie de la classe de PT est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques s'appuyant sur celles déjà travaillées au lycée et en classe de PTSI. Le programme vise à préparer les étudiants à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant. Parce que la physique et la chimie sont avant tout des sciences expérimentales qui développent la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ces derniers auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie intitulée « **Formation expérimentale** », sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes identifiées en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie intitulée « **Contenus thématiques** » est structurée autour de six thèmes : « Thermodynamique et mécanique des fluides appliquées aux machines thermiques », « Électronique », « Optique ondulatoire », « Électromagnétisme », « Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamiques » et « Aspects thermodynamique et cinétique de l'électrochimie ». La présentation en deux colonnes (« notions et contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise.
Certains items de cette seconde partie, identifiés **en caractères gras** dans la colonne « capacités exigibles », se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants.

Trois annexes sont consacrées, d'une part, au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes et, d'autre part, aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique-chimie à la fin de l'année de la classe de PT.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.
Analyser / Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur.

	- Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.
Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle. - Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.

Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral :
	    - présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente.
	    - rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation.
	    - utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.).
	- Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.

La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique**.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes facilitent cette mise en activité ;

- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques : mathématiques, informatique, sciences industrielles de l'ingénieur.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Enfin, le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :
- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.

Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur seconde année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.

Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe 1 du présent programme.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales nouvelles que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année de PT durant les séances de travaux pratiques. Elle vient prolonger la partie correspondante du programme de PTSI dont les capacités doivent être complètement acquises à l'issue des deux années de préparation, et restent donc au programme de seconde année de PT.

Les capacités rassemblées ici ne constituent en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'articuleraient autour d'une découverte du matériel, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion d'un problème concret. À ce titre, elle vient compléter la liste des thèmes d'étude – en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la partie « **Contenus thématiques** » – à partir desquels la problématique d'une séance peut être définie.

Les activités expérimentales sur le thème de la chimie sont aussi l'occasion de consolider les savoir-faire de la classe de PTSI en particulier dans le domaine des solutions aqueuses.

Nature et méthodes	Capacités exigibles
1. Mesures de longueurs	
Faibles longueurs dans le domaine de l'optique.	Mesurer le déplacement du miroir mobile d'un interféromètre de Michelson. Mesurer une longueur à l'aide d'un oculaire à vis micrométrique.
2. Mesures de temps et de fréquences	
Analyse spectrale.	Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition. Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
3. Électricité	
Filtrage analogique d'un signal périodique.	Mettre en évidence l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique dans les domaines fréquentiel et temporel.
Montages utilisant un amplificateur linéaire intégré (ALI).	Identifier les limitations suivantes : saturation en tension, saturation en courant, vitesse de balayage, bande passante. Mettre en œuvre divers montages utilisant un ALI.
Électronique numérique.	Utiliser un convertisseur analogique-numérique et un convertisseur numérique-analogique.
Onde électromagnétique.	Mettre en œuvre un détecteur dans le domaine des ondes centimétriques.

4. Optique	
Analyse d'une lumière.	Identifier, à l'aide d'un polariseur, une onde polarisée rectilignement et déterminer sa direction de polarisation. Mesurer une longueur d'onde à l'aide d'un goniomètre équipé d'un réseau.
Analyse d'une figure d'interférence.	Mettre en œuvre un photodétecteur en sortie d'un interféromètre.
Cohérence temporelle d'une source.	Régler un interféromètre de Michelson compensé pour une observation en lame d'air avec une source étendue à l'aide d'un protocole fourni. Obtenir une estimation de la longueur de cohérence d'une source et de l'écart spectral d'un doublet à l'aide d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air.
5. Thermodynamique	
Conduction thermique.	Mettre en œuvre un dispositif de mesure de conductivité thermique.
6. Thermodynamique de la transformation chimique et électrochimie	
Bilans d'énergie.	Mettre en œuvre une technique de calorimétrie. Déterminer la valeur en eau d'un calorimètre. Estimer les fuites thermiques lors d'expériences réalisées avec un calorimètre.
Mesures de grandeurs électriques : conductance-conductivité, tension électrique, intensité du courant.	Mettre en œuvre des mesures électriques dans un environnement chimique et électrochimique.
Électrochimie.	Mettre en œuvre un dispositif à trois électrodes pour tracer des courbes courant-potentiel. Mettre en œuvre des piles et des électrolyseurs.

3. Prévention du risque au laboratoire de physique-chimie

Les étudiants doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation et au rejet des produits chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité chimique, électrique, optique et celles liées à la pression et à la température leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire.

	Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- **Risque chimique** Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.	Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation.
- **Risque électrique**	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- **Risque optique**	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
- **Risques liés à la pression et à la température**	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.
2. Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

Contenus thématiques

Les contenus de la formation sont organisés autour de six thèmes.

1. Thermodynamique et mécanique des fluides appliquées aux machines thermiques

1.1. Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen
1.2. Expression différentielle des principes de la thermodynamique
1.3. Diagrammes d'état des fluides réels purs
1.4. Description d'un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite
1.5. Énergétique des fluides en écoulement dans une conduite
1.6. Thermodynamique industrielle
1.7. Transfert d'énergie par conduction thermique à une dimension en coordonnées cartésiennes.

2. Électronique

2.1. Stabilité des systèmes linéaires
2.2. Rétroaction
2.3. Oscillateurs
2.4. Électronique numérique

3. Optique ondulatoire

3.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses

3.2. Superposition d’ondes lumineuses
3.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d’onde : trous d'Young
3.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d’amplitude : interféromètre de Michelson

4. Électromagnétisme
4.1. Électrostatique
4.2. Magnétostatique
4.3. Équations de Maxwell
4.4. Énergie du champ électromagnétique
4.5. Propagation

5. Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamiques
5.1. Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques
5.2. Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques

6. Aspects thermodynamique et cinétique de l’électrochimie
6.1. Étude thermodynamique des réactions d’oxydo-réduction
6.2. Étude cinétique des réactions d’oxydo-réduction : courbe courant-potentiel
6.3. Stockage et conversion d’énergie chimique dans des dispositifs électrochimiques
6.4. Corrosion humide et électrochimique

1. Thermodynamique et mécanique des fluides appliquées aux machines thermiques

Cette partie du programme de la classe de PT s'intéresse aux phénomènes liés à l'écoulement d'un fluide et à la conduction thermique dans les machines thermiques. Elle est essentiellement abordée à travers la mise en œuvre de bilans d'énergie. Elle prolonge le programme de thermodynamique de la classe de PTSI en introduisant le formalisme de la thermodynamique différentielle.
Les principes de la thermodynamique pour un système fermé sont repris sous forme infinitésimale. Les identités thermodynamiques sont introduites dans le but d'établir et de comprendre les allures des courbes dans les diagrammes thermodynamiques ; il ne s'agit pas de les exploiter pour retrouver les expressions des fonctions d'état, ces dernières devant toujours être fournies. L'application des deux principes aux fluides en écoulement stationnaire dans les systèmes ouverts conduit ensuite à l'analyse de quelques systèmes industriels.
On introduit également en classe de PT des notions de base de mécanique des fluides. L’objectif est de décrire les écoulements simples de fluides dans les machines thermiques en évoquant les phénomènes de perte de charge et le rôle de la viscosité. L’approche se fonde exclusivement sur la notion de bilan macroscopique : toute formulation locale de la mécanique des fluides, notamment à l’aide d’opérateurs vectoriels, est exclue. Enfin, on aborde la conduction thermique à l'aide de bilans infinitésimaux, la loi de Newton étant introduite pour faire le lien avec la thermodynamique industrielle.

La partie « **Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen** » introduit sur le support concret de la statique des fluides le principe du découpage d’un domaine physique (volume, surface) en éléments infinitésimaux et la sommation d’une grandeur extensive (force) pour ce découpage. La poussée d'Archimède est présentée comme la résultante des forces de pression.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen	
Forces surfaciques, forces volumiques. Champ de pression.	Distinguer les forces de pression des forces de pesanteur.
Statique dans le champ de pesanteur uniforme.	Établir la relation entre la dérivée de la pression, la masse volumique, et le champ de pesanteur. Établir l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le cadre du modèle du gaz parfait. Comparer les variations de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère.
Résultante de forces de pression. Poussée d'Archimède.	Exprimer la force de pression sur une surface élémentaire en fonction de la pression. Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adapté. Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression. Exprimer une résultante de forces de pression sur une paroi ou sur un objet immergé.

La partie « **Expression différentielle des principes de la thermodynamique** » présente les principes de la thermodynamique sous forme différentielle. Dans le but d'unifier la présentation en physique et en chimie, les identités thermodynamiques sont introduites dans le cas d'un système de composition variable. Toute étude générale de la notion de potentiel thermodynamique est hors-programme.
Pour une grandeur extensive A, on note a la grandeur massique associée et A_m la grandeur molaire associée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Expression différentielle des principes de la thermodynamique	
Échelle mésoscopique, transformation infinitésimale.	Découper un système en sous-systèmes élémentaires. Découper une transformation finie en une succession de transformations infinitésimales.
Premier principe pour une transformation infinitésimale d'un système fermé. Deuxième principe pour une transformation infinitésimale d'un système fermé.	Appliquer les principes pour obtenir une équation différentielle relative au système considéré.
Potentiel thermodynamique. Fonction enthalpie libre G.	Justifier que G est un potentiel thermodynamique adapté à l'étude des transformations isothermes, isobares et spontanées.

Identités thermodynamiques pour un système fermé de composition variable. Potentiel chimique.	Citer les expressions des différentielles de U, H, G. Définir la température thermodynamique, la pression thermodynamique et le potentiel chimique. Distinguer les caractères intensif ou extensif des variables utilisées. Écrire les principes et les identités thermodynamiques par unité de masse du système. Exprimer l'enthalpie libre d'un système chimique en fonction des potentiels chimiques.
Système fermé de composition constante.	Exprimer les identités thermodynamiques.

L'étude des « **Diagrammes d'état des fluides réels purs** » est l'occasion de réinvestir les notions de thermodynamique différentielle. On y exploite également des diagrammes et tables de fluides réels afin d'habituer les étudiants à ne pas se limiter à des situations « idéales » (gaz parfait, etc.).

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1.3. Diagrammes d'état des fluides réels purs	
Notion de phase.	Définir et dénombrer les phases d'un système physico-chimique.
Évolution et équilibre d'un corps pur lors d'un changement d'état isotherme.	Écrire et utiliser les conditions d'évolution et d'équilibre en termes de potentiel chimique. Justifier le caractère isobare d'un changement d'état isotherme.
Enthalpie et entropie de changement d'état.	Citer l'ordre de grandeur de l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau. Calculer l'énergie récupérable par transfert thermique lors d'une liquéfaction isobare. Relier l'entropie de changement d'état à l'enthalpie de changement d'état.
Titre massique.	Utiliser la règle des moments.
Diagrammes de Clapeyron (P,v), entropique (T,s), de Mollier (h,s) et des frigoristes (log P,h).	Représenter, pour chaque diagramme, l'allure des courbes isothermes, isobares, isentropiques et isenthalpiques. Établir l'équation de ces courbes dans la limite du gaz parfait et dans celle du liquide incompressible et indilatable. Exploiter un diagramme pour déterminer la valeur d'une grandeur physique.
Tables thermodynamiques.	Exploiter les tables thermodynamiques pour calculer des grandeurs physiques dans le domaine diphasique, ou pour prévoir l'état physique d'un fluide.

La partie « **Description d'un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite** » introduit le point de vue eulérien pour l'étude des écoulements. Il s'agit de décrire simplement un écoulement en identifiant des tubes de courant sur lesquels des bilans peuvent ensuite être effectués.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.4. Description d'un fluide en écoulement stationnaire dans une conduite	
Grandeurs eulériennes. Régime stationnaire.	Décrire localement les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs intensives pertinentes.
Lignes et tubes de courant. Débit massique.	Exprimer le débit massique. Exploiter la conservation du débit massique le long d'un tube de courant.
Débit volumique.	Justifier l'intérêt d'utiliser le débit volumique pour l'étude d'un fluide de volume massique uniforme en écoulement.
Écoulements laminaires et turbulents. Nombre de Reynolds.	Relier le régime d'écoulement au nombre de Reynolds.

Dans la partie « **Énergétique des fluides en écoulement dans une conduite** », on effectue des bilans énergétiques dans une conduite. On se place dans un premier temps dans le cadre de la dynamique des fluides parfaits. Toute utilisation de l'équation d'Euler ou de Navier-Stokes est exclue. La relation de Bernoulli est établie. Les pertes de charge dans les conduites sont ensuite prises en compte et, dans ce cadre, les étudiants sont initiés à la lecture d'abaques. Enfin, les transferts thermiques sont pris en compte afin d'exprimer les principes de la thermodynamique pour un système en écoulement.

1.5. Énergétique des fluides en écoulement dans une conduite	
Fluides parfaits. Fluides newtoniens : notion de viscosité.	Citer des ordres de grandeur de viscosité dynamique de gaz et de liquides (air, eau et lubrifiant). Relier l'expression de la force surfacique de cisaillement au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle. Exploiter les conditions aux limites du champ de vitesse d'un fluide dans une conduite.
Relation de Bernoulli.	Définir un volume et une surface de contrôle. Établir et exploiter la relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, incompressible en écoulement stationnaire.
Pertes de charges singulière et régulière. Bilan d'énergie.	Modifier la relation de Bernoulli afin de tenir compte de la dissipation d'énergie. Établir un bilan de puissance pour un circuit hydraulique ou pneumatique avec ou sans pompe. **Mettre en évidence une perte de charge.**

Travail indiqué massique d'une machine.	Relier la notion de travail indiqué massique à la présence de parties mobiles.
Premier et deuxième principes pour un écoulement stationnaire unidimensionnel d'un système à une entrée et une sortie.	Établir et utiliser les premier et deuxième principes formulés avec des grandeurs massiques. Identifier les termes à négliger en fonction du contexte étudié. Relier l'entropie massique créée aux causes d'irréversibilité.
Systèmes à plusieurs entrées et sorties.	Exprimer la conservation du débit massique. Exprimer le premier principe en utilisant les puissances indiquée et thermique.

La partie « **Thermodynamique industrielle** » permet un approfondissement du cours de première année, par l'étude de cycles industriels. On se limite à des calculs relatifs au modèle du gaz parfait ou à l'utilisation des diagrammes d'état si le fluide est réel. Aucune connaissance relative à la technologie des installations ou aux différents types de cycles n'est exigible.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1.6. Thermodynamique industrielle	
1.6.1. Étude de quelques dispositifs d'une installation industrielle	
Compresseur et turbine calorifugés.	Établir et exploiter la variation d'enthalpie massique pour une transformation réversible. Établir et exploiter la variation d'enthalpie massique pour une transformation irréversible, le rendement isentropique étant défini et fourni.
Mélangeur et séparateur isobares calorifugés.	Établir et exploiter les relations entre enthalpies et débits massiques.
Échangeur thermique calorifugé.	Établir et exploiter la relation entre les puissances thermiques reçues par les deux écoulements.
Détendeur calorifugé (laminage).	Établir et exploiter la nature isenthalpique de la transformation.
Tuyère calorifugée.	Établir la relation entre la vitesse de sortie des gaz et la variation d'enthalpie.
1.6.2. Cycles industriels	

Moteurs, réfrigérateurs, pompes à chaleur.	Repérer, pour une machine dont les éléments constitutifs sont donnés, les sources thermiques, le sens des échanges thermiques et mécaniques. Relier le fonctionnement d'une machine au sens de parcours du cycle dans un diagramme thermodynamique. Exploiter des diagrammes et des tables thermodynamiques pour déterminer les grandeurs thermodynamiques intéressantes. Définir et exprimer le rendement, l'efficacité ou le coefficient de performance de la machine. Citer des ordres de grandeur de puissances thermique et mécanique mises en jeu pour différentes tailles de dispositifs. Utiliser des documents ou des logiciels afin de discuter l'amélioration de cycles industriels : rôle du préchauffage, de la surchauffe, du choix du fluide.

La partie « **Transfert d'énergie par conduction thermique à une dimension en coordonnées cartésiennes** » aborde l'étude de la conduction thermique dans les solides. On se limite à l'étude de problèmes à une dimension en coordonnées cartésiennes.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1.7 Transfert d'énergie par conduction thermique à une dimension en coordonnées cartésiennes.	
Vecteur densité de flux thermique.	Définir et algébriser le flux thermique échangé à travers une interface.
Loi de Fourier.	Lier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Utiliser la loi de Fourier. Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique dans le domaine de l'habitat.
Bilan d'énergie.	Établir l'équation différentielle entre la température et le vecteur densité de flux thermique.
Équation de la diffusion thermique sans terme source.	Établir l'équation de la diffusion thermique. Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène. Relier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion au coefficient de diffusion thermique par une analyse dimensionnelle. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la

	méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire.	Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie lors d'un bilan thermique.
Loi de Newton.	Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs.

2. Électronique

Ce module renforce et complète l'étude des circuits électriques linéaires menée dans la partie « **Ondes et signaux** » du programme de première année. Ainsi, les notions de filtrage et d'analyse spectrale sont réinvesties, en particulier dans les activités expérimentales. Le programme de deuxième année ajoute la rétroaction et le bouclage des systèmes linéaires dans le but d'aborder la stabilité, les oscillateurs et la réalisation de filtres actifs.

Ces différentes thématiques sont illustrées à l'aide de l'amplificateur linéaire intégré (ALI) dont l'étude n'est pas une fin en soi mais un outil permettant des réalisations expérimentales variées. Par ailleurs, des exemples de manifestations des non-linéarités sont abordés à l'occasion de la saturation d'un amplificateur ou de la réalisation d'une fonction mémoire (comparateur à hystérésis).

Afin de compléter l'approche analogique des circuits électriques, un module à vocation expérimentale est consacré au traitement numérique des signaux à travers les sujets suivants :

- la conversion analogique numérique ;
- l'échantillonnage et le repliement de spectre ;
- le filtrage numérique.

La partie « **Stabilité des systèmes linéaires** » s'intéresse aux propriétés des systèmes linéaires déjà abordés en première année. Les capacités relatives au filtrage et à la décomposition harmonique d'un signal périodique sont reprises. L'étude est complétée par une analyse de la stabilité des systèmes du premier et du second ordre en examinant le régime transitoire associé à l'équation différentielle.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
2.1. Stabilité des systèmes linéaires	
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (équation différentielle).
Stabilité.	Étudier la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 à partir des signes des coefficients de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert.

La partie « **Rétroaction** » illustre quelques propriétés relatives à la rétroaction sur l'exemple de l'amplificateur linéaire intégré. L'étude des circuits est strictement limitée à des situations pouvant être facilement abordées avec les outils introduits en première année (loi des mailles, loi des nœuds, diviseur de tension). La vitesse limite de balayage de l'ALI est évoquée en travaux pratiques afin d'identifier les distorsions harmoniques traduisant un comportement non linéaire du système étudié. Les limitations associées aux courants de polarisation et la tension de décalage ne sont pas étudiées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2. Rétroaction	
Modèle de l'ALI défini par des courants de polarisation nuls, une résistance de sortie nulle, une fonction de transfert du premier ordre en régime linéaire, une saturation de la tension de sortie.	Citer les hypothèses du modèle et les ordres de grandeur du gain différentiel statique et du temps de réponse. Modéliser un ALI fonctionnant en régime linéaire à l'aide d'un schéma bloc.
Limites du modèle : vitesse limite de balayage, saturation de l'intensité du courant de sortie.	**Détecter, dans un montage à ALI, les manifestations de la vitesse limite de balayage et de la saturation de l'intensité du courant de sortie.**
Montages amplificateur non inverseur et comparateur à hystérésis.	Analyser la stabilité du régime linéaire. Établir la conservation du produit gain-bande passante du montage non inverseur.
ALI idéal de gain infini en régime linéaire.	Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de fonctionnement en régime linéaire. Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur. Déterminer les impédances d'entrée de ces montages. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension, de forte impédance d'entrée et de faible impédance de sortie.
ALI idéal de gain infini en régime saturé.	Établir la relation entrée-sortie du comparateur simple. Associer, pour une entrée sinusoïdale, le caractère non-linéaire du système et la génération d'harmoniques en sortie. Établir le cycle d'un comparateur à hystérésis. Définir le phénomène d'hystérésis en relation avec la notion de mémoire.

La partie « **Oscillateurs** » s'intéresse à une étude non exhaustive des oscillateurs en électronique. Les exemples sont choisis à l'initiative du professeur et les calculs des fonctions de transfert des filtres ne constituent pas un objectif de formation. En travaux pratiques, on complète l'étude par une analyse spectrale des signaux.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3. Oscillateurs	

Oscillateur quasi-sinusoïdal réalisé en bouclant un filtre du deuxième ordre avec un amplificateur.	Exprimer les conditions théoriques (gain et fréquence) d'auto-oscillation sinusoïdale d'un système linéaire bouclé. Analyser, à partir de l'équation différentielle, l'inégalité que doit vérifier le gain de l'amplificateur afin d'assurer le démarrage des oscillations. Interpréter le rôle des non-linéarités dans la stabilisation de l'amplitude des oscillations. **Mettre en œuvre un oscillateur quasi-sinusoïdal et analyser les spectres des signaux générés.** Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler l'évolution temporelle d'un signal généré par un oscillateur.
Oscillateur de relaxation associant un intégrateur et un comparateur à hystérésis.	Décrire les différentes séquences de fonctionnement. Exprimer les conditions de basculement. Déterminer l'expression de la période.
Générateur de signaux non sinusoïdaux.	**Mettre en œuvre un oscillateur de relaxation et analyser les spectres des signaux générés.**

La partie « **Électronique numérique** » est étudiée de manière expérimentale et aborde la question du traitement numérique du signal dans le prolongement du programme de première année.
Le phénomène de repliement de spectre est expliqué qualitativement par exemple à l'aide d'une analogie stroboscopique, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon et de réaliser convenablement une acquisition numérique en vue d'une analyse spectrale.
Afin de mettre en évidence d'autres effets associés à l'échantillonnage, on réalise de manière comparative un filtre analogique passe-bas et un filtre numérique remplissant la même fonction. Ce dernier est réalisé à l'aide d'une chaîne de traitement : CAN, algorithme numérique, CNA.
On étudie expérimentalement l'influence de la fréquence d'échantillonnage.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.4. Électronique numérique	
Échantillonnage.	**Mettre en évidence l'influence de la fréquence d'échantillonnage.**
Condition de Nyquist-Shannon.	Utiliser la condition de Nyquist-Shannon. **Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre dû à l'échantillonnage lors de l'utilisation d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.**

Analyse spectrale numérique.	**Choisir les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une d'acquisition numérique afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.**
Filtrage numérique.	Capacité numérique : réaliser, à l'aide d'un langage de programmation, un filtrage numérique passe-bas d'un signal issu d'une acquisition et mettre en évidence la limitation introduite par l'échantillonnage.

3. Optique ondulatoire

Le programme d'optique ondulatoire de la classe de PT s'inscrit dans le prolongement de la partie « **Propagation d'un signal »** du thème « **Ondes et signaux** » du programme de la classe de PTSI. Il s'agit pour les étudiants d'approfondir l'étude des phénomènes d'interférences lumineuses, conséquences de la nature ondulatoire de la lumière.
Si le formalisme utilisé permet une modélisation précise des phénomènes décrits, il convient néanmoins de privilégier les aspects expérimentaux et d'utiliser tous les supports de visualisation (expériences de cours, simulations, animations, etc.) pour aider les étudiants dans la construction de leurs représentations. L'enseignant peut souligner que ces phénomènes, étudiés dans le cadre de l'optique, sont généralisables à tout comportement ondulatoire.
L'approche expérimentale est centrée sur la mise en œuvre des trous d'Young, de l'interféromètre de Michelson compensé (parallélisme compensatrice/séparatrice préréglé) et de dispositifs d'interférences à N ondes.

La partie « **Modèle scalaire des ondes lumineuses** » introduit les outils nécessaires pour décrire les phénomènes d'interférences. Le programme utilise le mot « intensité » pour décrire la grandeur détectée mais on peut utiliser indifféremment les mots « intensité » ou « éclairement » sans chercher à les distinguer à ce niveau. L'intensité lumineuse est introduite comme une puissance par unité de surface. Le théorème de Malus (orthogonalité des rayons de lumière et des surfaces d'ondes) est admis.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses	
Modèle de propagation dans l'approximation de l'optique géométrique.	Utiliser une grandeur scalaire pour décrire un signal lumineux.
Chemin optique. Déphasage dû à la propagation. Surfaces d'ondes. Théorème de Malus (admis).	Exprimer le retard de phase en un point (par rapport à un autre) en fonction de la durée de propagation ou du chemin optique.
Onde plane, onde sphérique ; effet d'une lentille mince dans l'approximation de Gauss.	Associer une description de la formation des images en termes de rayon de lumière et de surfaces d'onde. Utiliser la propriété énonçant que le chemin optique séparant deux points conjugués est indépendant du rayon de lumière choisi.

Modèle d'émission. Relation (admise) entre le temps de cohérence et la largeur spectrale.	Citer l'ordre de grandeur du temps de cohérence Δt de quelques sources de lumière. Utiliser la relation $\Delta f.\ \Delta t \approx 1$ pour lier la durée des trains d'ondes et la largeur spectrale $\Delta\lambda$ de la source.
Détecteurs. Intensité lumineuse.	Relier l'intensité lumineuse à la moyenne temporelle du carré de la grandeur scalaire optique. Citer l'ordre de grandeur du temps d'intégration de quelques capteurs optiques. **Mettre en œuvre une expérience utilisant un capteur photographique numérique.**

Dans la partie « **Superposition d'ondes lumineuses** », la formule de Fresnel, admise en classe de première année, est démontrée. L'étude de la superposition de N ondes cohérentes ne doit pas donner lieu à des développements calculatoires.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
3.2. Superposition d'ondes lumineuses	
Superposition d'ondes incohérentes entre elles.	Justifier et exploiter l'additivité des intensités.
Superposition de deux ondes cohérentes entre elles : formule de Fresnel. Facteur de contraste.	Vérifier que les principales conditions pour que le phénomène d'interférences apparaisse (égalité des pulsations et déphasage constant dans le temps) sont réunies. Établir et exploiter la formule de Fresnel. Associer un bon contraste à des intensités voisines.
Superposition de N ondes cohérentes, de même amplitude et dont les phases sont en progression arithmétique. Réseau par transmission.	Établir l'expression de la différence de marche entre deux motifs consécutifs. Établir la relation fondamentale des réseaux liant la condition d'interférences constructives à la valeur de la différence de marche entre deux motifs consécutifs. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant un phénomène d'interférences à N ondes.** **Relier qualitativement le nombre de traits d'un réseau à la largeur des franges brillantes.**

Dans la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young** », les trous d'Young permettent de confronter théorie et expérience. Les fentes d'Young peuvent être abordées mais de manière exclusivement expérimentale. Aucune connaissance sur un autre diviseur du front d'onde n'est exigible.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young	
Trous d'Young ponctuels dans un milieu non dispersif : source à distance finie et observation à grande distance finie. Ordre d'interférences.	Exprimer et utiliser l'ordre d'interférences. **Mettre en œuvre une expérience d'interférences : trous d'Young ou fentes d'Young.** **Montrer la non-localisation des franges d'interférences.**
Franges d'interférences. Interfrange.	Justifier la forme des franges observées.
Variations de l'ordre d'interférences avec la position ou la longueur d'onde de la source ; perte de contraste par élargissement spatial ou spectral de la source.	Utiliser un critère de brouillage des franges pour interpréter des observations expérimentales.

Dans la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson** », l'étude de l'interféromètre de Michelson en lame d'air permet de confronter théorie et expérience. L'étude de l'interféromètre de Michelson en coin d'air est abordée de manière exclusivement expérimentale. Pour la modélisation d'un interféromètre de Michelson, on suppose la séparatrice infiniment mince.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson	
Interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue. Localisation (admise) des franges.	Citer les conditions d'éclairage et d'observation en lame d'air et en coin d'air.
Lame d'air : franges d'égale inclinaison.	Établir et utiliser l'expression de l'ordre d'interférence en fonction de la longueur d'onde, de l'épaisseur de la lame d'air équivalente et de l'angle d'inclinaison des rayons. **Régler un interféromètre de Michelson compensé pour une observation en lame d'air avec une source étendue à l'aide d'un protocole fourni.** **Mettre en œuvre un protocole pour accéder à l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence d'une raie et à l'écart spectral d'un doublet à l'aide d'un interféromètre de Michelson.**
Coin d'air : franges d'égale épaisseur.	Utiliser l'expression admise de la différence de marche en fonction de l'épaisseur. **Caractériser la géométrie d'un objet ou l'indice d'un milieu à l'aide d'un interféromètre de Michelson.**

	Interpréter qualitativement les observations en lumière blanche.

4. Électromagnétisme

Le programme d'électromagnétisme de la classe de PT s'inscrit dans le prolongement des parties « **Propagation d'un signal** » et « **Induction et forces de Laplace** » du thème « **Ondes et signaux** » du programme de PTSI. Il s'agit pour les étudiants de découvrir les lois locales et intégrales qui gouvernent les champs électrique et magnétique et des applications dans des domaines variés.
Si certaines notions ont été abordées en classe de première année de PTSI, le formalisme utilisé constitue bien souvent pour les étudiants une première découverte ; il convient pour l'enseignant d'être particulièrement attentif aux difficultés potentielles des étudiants et d'utiliser tous les outils de visualisation (expériences de cours, simulations, animations, etc.) pour aider les étudiants dans la construction de leurs représentations.
L'étude des champs électrostatique et magnétostatique est présentée en deux parties distinctes ; l'enseignant est libre, s'il le souhaite, de procéder à une présentation unifiée de la notion de champ statique. Pour les calculs de champs, l'accent est mis sur les situations à haut degré de symétrie qui permettent l'utilisation efficace des propriétés de flux ou de circulation. Les équations locales des champs statiques sont introduites comme cas particuliers des équations de Maxwell.
La loi de Biot et Savart et la notion de potentiel vecteur ne relèvent pas du programme. Les relations de passage relatives au champ électromagnétique peuvent être exploitées, mais doivent être systématiquement fournies en cas de besoin.
Après une présentation des équations de Maxwell et des aspects énergétiques, le programme analyse le phénomène de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide, la structure des champs associés et la réflexion des ondes sur un conducteur parfait. La propagation dans les milieux est abordée en se limitant à l'étude d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique et dans un guide d'onde modélisé par deux plans infinis.

Les notions abordées la partie « **Électrostatique** » sont centrées sur les distributions de charges, le champ et le potentiel. Pour le champ électrique et le potentiel, on se limite aux expressions explicites dans le cas de charges ponctuelles et sous forme intégrale dans le cas de distributions continues.
L'accent est mis sur les propriétés intégrales du champ et sur le théorème de Gauss pour des situations présentant un haut degré de symétrie.
Des capacités sur la lecture des lignes de champ et des surfaces équipotentielles sont développées. Le condensateur plan est introduit mais l'étude des conducteurs en équilibre électrostatique ne relève pas du programme. Une approche énergétique est conduite dans le cas d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrique extérieur. Les analogies avec la gravitation sont centrées sur l'application du théorème de Gauss.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1. Électrostatique	
Loi de Coulomb. Champ électrostatique. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.

Distributions continues de charges volumique, surfacique, linéique.	Décomposer une distribution en des distributions plus simples dans le but de calculer un champ électrostatique par superposition. Choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée. Justifier qualitativement le choix d'une modélisation d'une distribution de charges par une distribution infinie. Évaluer la charge totale d'une distribution continue dans des situations à géométries simples.
Symétries et invariances du champ électrostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges. Identifier les invariances d'une distribution de charges. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique créé.
Circulation du champ électrostatique. Potentiel électrostatique.	Relier le champ électrostatique au potentiel. Exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges. Calculer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques. Exprimer une différence de potentiel comme une circulation du champ électrostatique.
Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss.	Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Systèmes modélisés par une sphère, un cylindre infini et du plan infini.	Établir les expressions des champs électrostatiques créés en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume, par un cylindre infini uniformément chargé en volume et par un plan infini uniformément chargé en surface. Établir et exploiter qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.
Condensateur plan modélisé par la superposition de deux distributions surfaciques infinies de charges opposées.	Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide.

Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles.	Orienter les lignes de champ du champ électrostatique créé par une distribution de charges. Représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement. Associer, en dehors des sources, les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, tracer quelques lignes de champ et lignes équipotentielles pour une distribution donnée.
Énergie potentielle électrostatique d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.	Établir et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.
Champ de gravitation.	Utiliser le théorème de Gauss dans le cas de la gravitation.

L'étude de la magnétostatique menée dans la partie « **Magnétostatique** » s'appuie le plus possible sur les différents aspects qualitatifs et quantitatifs vus en première année de PTSI ; les étudiants sont donc déjà familiarisés avec le concept de champ magnétostatique. La loi de Biot et Savart n'est pas introduite ; l'utilisation de celle-ci pour calculer un champ magnétostatique est donc exclue.
Les distributions de courants surfaciques ne sont pas introduites à ce niveau du programme, elles le sont uniquement à l'occasion de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait.
On aborde les propriétés intégrales du champ et on utilise le théorème d'Ampère pour des calculs dans des cas présentant un haut degré de symétrie.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
4.2. Magnétostatique	
Vecteur densité de courant volumique. Intensité du courant. Distributions de courant volumique et linéique.	Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant volumique.
Symétries et invariances des distributions de courant.	Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.

Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	Identifier les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère en vue de déterminer l'expression d'un champ magnétique. Utiliser une méthode de superposition. Citer quelques ordres de grandeur de valeurs de champs magnétostatiques.
Modèles du fil rectiligne infini de section non nulle et du solénoïde infini.	Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ du champ magnétostatique créé par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à l'évolution de la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.

Dans la partie « **Équations de Maxwell** », une vision cohérente des lois de l'électromagnétisme est présentée. Elle constitue une première approche quantitative du phénomène de propagation et permet également de revenir qualitativement sur l'induction étudiée en classe de première année de PTSI.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.3. Équations de Maxwell	
Principe de la conservation de la charge : formulation locale.	Établir l'équation locale de la conservation de la charge dans le cas à une dimension. Citer l'équation locale de la conservation de la charge à l'aide de l'opérateur divergence.
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Associer l'équation de Maxwell-Faraday à la loi de Faraday. Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Relier qualitativement le couplage spatiotemporel entre champ électrique et champ magnétique au phénomène de propagation. Déduire l'équation locale de la conservation de la charge.

Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants.	Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.
Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) magnétique.	Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans le cadre de l'ARQS en admettant que les courants de déplacement sont négligeables.
Cas des champs statiques : équations locales.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique.	Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique.

Dans la partie « **Énergie du champ électromagnétique** », on s'intéresse à l'aspect énergétique de l'électromagnétisme. Aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible ; l'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, sur l'utilisation du flux du vecteur de Poynting pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et sur les bilans d'énergie et de puissance.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
4.4. Énergie du champ électromagnétique	
Densité volumique de force électromagnétique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
Loi d'Ohm locale ; effet Joule.	Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting : bilan d'énergie.	Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme locale et intégrale. Interpréter chaque terme de l'équation locale de Poynting, celle-ci étant donnée.

La partie « **Propagation** », articulée autour des ondes électromagnétiques, est l'occasion d'illustrer l'efficacité du formalisme local des équations de Maxwell en insistant sur les aspects qualitatifs et sur la variété des applications qui en découlent.
Si le modèle de l'onde plane est présenté dans le cadre de l'espace vide de courant et de charge, l'étude des ondes électromagnétiques dans un milieu ohmique permet d'enrichir les compétences des étudiants sur les phénomènes de propagation en abordant l'effet de peau.
La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait et son confinement dans une cavité permettent aux étudiants d'aborder la notion d'onde stationnaire et de découvrir des savoir-faire spécifiques permettant leur étude efficace. La notion de densité de courant surfacique est introduite, mais le calcul de l'intensité à travers un segment ne relève pas du programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.5. Propagation	
Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant ; onde plane progressive et aspects énergétiques.	Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension. Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant.
Onde plane progressive monochromatique.	Expliquer le caractère idéal du modèle de l'onde plane monochromatique. Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications. Exprimer le vecteur de Poynting et l'énergie électromagnétique volumique associés à une onde plane progressive monochromatique. Effectuer une étude énergétique dans le cas d'une onde plane progressive
États de polarisation d'une onde plane progressive et monochromatique : polarisation rectiligne. Polariseurs.	Reconnaître une onde plane polarisée rectilignement. **Mettre en évidence une polarisation rectiligne.**
Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique dans le cadre de l'ARQS magnétique. Effet de peau.	Établir et interpréter l'expression de la grandeur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans un milieu ohmique.
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire.	Exploiter la nullité (admise) des champs dans un métal parfait. Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Modes d'onde stationnaire.	Établir la condition de quantification des solutions. **Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique dans le domaine des ondes centimétriques.**

5. Transformations chimiques de la matière : aspects thermodynamiques

Les transformations chimiques de la matière ont été abordées en classe de PTSI ; le critère d'évolution spontanée d'un système chimique en transformation y a été présenté sans être démontré. Ce dernier a été remobilisé lors de l'étude des transformations chimiques en solution aqueuse.
Le but de cette partie est d'une part d'aborder les transferts thermiques et d'autre part d'établir puis exploiter le critère d'évolution spontanée d'un système engagé dans une transformation physico-chimique.

Dans la partie « **Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques** », l'étude des transferts thermiques, abordée en première année dans le cadre du cours de physique relatif aux transformations physiques du corps pur, est ici généralisée aux transformations physico-chimiques. Les enthalpies standard de réaction sont considérées comme indépendantes de la température.
Les notions et contenus sont illustrés à travers des applications liées à la vie quotidienne (contenu calorique des aliments, pouvoirs calorifiques des carburants, etc.), à la recherche (apports des techniques calorimétriques modernes, etc.) ou au domaine industriel.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.1. Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	
État standard. Enthalpie standard de réaction. Loi de Hess. Enthalpie standard de formation, état standard de référence d'un élément.	Déterminer l'enthalpie standard de réaction à l'aide de tables de données thermodynamiques. Associer le signe de l'enthalpie standard de réaction au caractère endothermique ou exothermique de la réaction.
Effets thermiques pour une transformation monobare : - transfert thermique associé à la transformation chimique en réacteur monobare, isotherme ; - variation de température en réacteur adiabatique, monobare.	Prévoir, à partir de données thermodynamiques, le sens et une estimation de la valeur du transfert thermique entre un système, siège d'une transformation physico-chimique, et le milieu extérieur. Évaluer la température atteinte par un système siège d'une transformation chimique supposée monobare et réalisée dans un réacteur adiabatique. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'évolution temporelle de la température pour un système siège d'une transformation adiabatique modélisée par une seule réaction chimique dont les caractéristiques cinétiques et l'enthalpie standard de réaction sont données. **Déterminer une enthalpie standard de réaction.**

La fonction enthalpie libre G et la notion de potentiel chimique ont été introduites dans la partie « **Expression différentielle des principes de la thermodynamique** ». Dans la partie « **Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques** », on adopte pour les potentiels chimiques une expression générale :
$\mu_i = \mu_{iréf} + RT\ln(a_i)$ qui fait référence aux activités a_i introduites en première année.
L'établissement de cette expression est hors programme. L'influence de la pression sur le potentiel chimique d'un constituant en phase condensée pure n'est pas abordée. On se limite aux cas d'une espèce chimique pure, d'une espèce en solution aqueuse très diluée et d'une espèce en mélange de gaz parfaits avec référence à l'état standard.
Pour le calcul des grandeurs standard de réaction, les enthalpies et entropies standard de réaction sont supposées indépendantes de la température en dehors des changements d'états. Les grandeurs standard de réaction permettent la détermination, à une température donnée, de la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre K° caractéristique d'une réaction, valeur qui était systématiquement donnée en première année. C'est ainsi l'occasion de revenir sur la détermination de la composition d'un système physico-chimique en fin d'évolution.

La notion d'affinité chimique n'est pas utilisée, le sens d'évolution spontanée d'un système hors d'équilibre, à température et pression fixées, est déterminé par le signe de l'enthalpie libre de réaction Δ_rG.
Enfin, l'étude de l'influence de la modification d'un paramètre (pression, température ou composition) sur un système chimique permet d'aborder la problématique de l'optimisation des conditions opératoires d'un procédé chimique.
Les illustrations et applications sont choisies dans le domaine industriel, dans la vie courante et au niveau du laboratoire.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.2. Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	
Enthalpie standard de réaction, entropie standard de réaction et grandeurs standard associées. Relation entre enthalpie libre de réaction et quotient de réaction ; évolution d'un système chimique.	Justifier qualitativement ou prévoir le signe de l'entropie standard de réaction. Relier création d'entropie et enthalpie libre de réaction lors d'une transformation d'un système physico-chimique à pression et température fixées. Prévoir le sens d'évolution à pression et température fixées d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de l'enthalpie libre de réaction. Déterminer les grandeurs standard de réaction à partir des tables de données thermodynamiques et de la loi de Hess. Déterminer les grandeurs standard de réaction d'une réaction dont l'équation est combinaison linéaire d'autres équations de réaction.

Constante thermodynamique d'équilibre ; relation de Van 't Hoff.	Citer et exploiter la relation de Van 't Hoff. Déterminer la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre à une température quelconque. **Déterminer l'évolution de la valeur d'une constante thermodynamique d'équilibre en fonction de la température.**
État final d'un système : équilibre chimique ou transformation totale.	Déterminer la composition chimique d'un système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique.
Optimisation thermodynamique d'un procédé chimique : - par modification de la valeur de K° ; - par modification de la valeur du quotient de réaction.	Identifier les paramètres d'influence et leur contrôle pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable.

6. Aspects thermodynamique et cinétique de l'électrochimie

Les aspects thermodynamiques et cinétiques des réactions d'oxydo-réduction sont appliqués notamment à la corrosion d'une part et aux dispositifs électrochimiques que sont les piles et les accumulateurs d'autre part. L'illustration des notions gagne à s'appuyer sur des applications concrètes comme par exemple la mise en œuvre de capteurs électrochimiques dans l'analyse de l'eau, de l'air ou d'effluents.
L'approche de l'électrochimie proposée privilégie les raisonnements qualitatifs et les aspects expérimentaux, plutôt que les développements théoriques et formels.

La partie « **Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction** » se fonde sur les acquis de première année relatifs à l'étude des réactions d'oxydo-réduction et des piles, ainsi que sur la partie de thermodynamique chimique de seconde année pour relier les grandeurs thermodynamiques aux potentiels et potentiels standard.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.1. Étude thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction	
Relation entre enthalpie libre de réaction et potentiels des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.	Citer et exploiter la relation entre l'enthalpie libre de réaction et les potentiels des couples mis en jeu dans une réaction d'oxydo-réduction.
Relation entre enthalpie libre standard de réaction et potentiels standard des couples impliqués.	Déterminer l'enthalpie libre standard d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples. Déterminer la valeur du potentiel standard d'un couple d'oxydo-réduction à partir de données thermodynamiques.

La partie « **Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction : courbe courant-potentiel** » se fonde sur les acquis de cinétique chimique de première année et les prolongent par le tracé et l'exploitation de courbes courant-potentiel.
Les courbes courant-potentiel, dont le tracé est proposé en capacité expérimentale, sont un outil essentiel dans la compréhension et la modélisation des systèmes électrochimiques.
L'écart entre le potentiel d'une électrode et son potentiel d'équilibre est appelé surpotentiel plutôt que surtension pour des raisons pédagogiques, en cohérence avec le vocabulaire anglo-saxon correspondant.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.2. Étude cinétique des réactions d'oxydo-réduction : courbe courant-potentiel	
Courbes courant-potentiel sur une électrode en régime stationnaire : - surpotentiel ; - systèmes rapides et systèmes lents ; - nature de l'électrode ; - courant de diffusion limite ; - vagues successives ; - domaine d'inertie électrochimique du solvant.	Décrire le montage à trois électrodes permettant de tracer des courbes courant-potentiel. Relier vitesse de réaction électrochimique et intensité du courant. Identifier le caractère lent ou rapide d'un système à partir des courbes courant-potentiel. Identifier les espèces électroactives pouvant donner lieu à une limitation en courant par diffusion. Relier qualitativement ou quantitativement, à partir de relevés expérimentaux, l'intensité du courant de diffusion limite à la concentration du réactif et à la surface immergée de l'électrode. Tracer l'allure de courbes courant-potentiel de branches d'oxydation ou de réduction à partir de données fournies, de potentiels standard, concentrations et surpotentiels. **Tracer et exploiter des courbes courant-potentiel.**

La partie « **Stockage et conversion d'énergie dans des dispositifs électrochimiques** » s'appuie sur les courbes courant-potentiel pour étudier le fonctionnement des piles et leur recharge, ainsi que les électrolyseurs. Ces courbes permettent de déterminer différentes caractéristiques : réactions aux électrodes, tension à vide, tension à imposer pour une recharge, etc.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.3. Stockage et conversion d'énergie chimique dans des dispositifs électrochimiques	
Conversion d'énergie chimique en énergie électrique : fonctionnement des piles.	
Transformations spontanées et réaction modélisant le fonctionnement d'une pile électrochimique.	Établir l'inégalité reliant la variation d'enthalpie libre et le travail électrique.

	Relier la tension à vide d'une pile et l'enthalpie libre de la réaction modélisant son fonctionnement. Déterminer la capacité électrique d'une pile.
Courbes courant-potentiel et fonctionnement d'une pile électrochimique.	Exploiter les courbes courant-potentiel pour rendre compte du fonctionnement d'une pile électrochimique et tracer sa caractéristique. Citer les paramètres influençant la résistance interne d'une pile électrochimique.
Conversion d'énergie électrique en énergie chimique. Transformations forcées lors d'une électrolyse et de la recharge d'un accumulateur.	 Exploiter les courbes courant-potentiel pour rendre compte du fonctionnement d'un électrolyseur et prévoir la valeur de la tension minimale à imposer. Exploiter les courbes courant-potentiel pour justifier les contraintes (purification de la solution électrolytique, choix des électrodes) dans la recharge d'un accumulateur. Déterminer la masse de produit formé pour une durée et des conditions données d'électrolyse. Déterminer un rendement faradique à partir d'informations fournies concernant le dispositif étudié.
Stockage et conversion d'énergie chimique.	**Étudier le fonctionnement d'une pile ou d'un électrolyseur pour effectuer des bilans de matière et des bilans électriques.**

La lutte contre la corrosion est un enjeu économique actuel et la compréhension des phénomènes de corrosion et des facteurs influençant cette corrosion est essentielle pour effectuer des choix de méthodes de protection. La partie « **Corrosion humide ou électrochimique** » exploite les courbes courant-potentiel pour interpréter les phénomènes de corrosion, de protection et de passivation. On se limite à la corrosion uniforme et à la corrosion galvanique de deux métaux en contact. Les tracés de diagrammes de Tafel ou d'Evans sont hors-programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.4. Corrosion humide ou électrochimique	
Corrosion uniforme en milieu acide ou en milieu neutre oxygéné : potentiel de corrosion, courant de corrosion. Corrosion d'un système de deux métaux en contact.	Positionner un potentiel de corrosion sur un tracé de courbes courant-potentiel. Interpréter le phénomène de corrosion uniforme d'un métal ou de deux métaux en contact en utilisant des courbes courant-potentiel ou d'autres données

	expérimentales, thermodynamiques et cinétiques. Citer des facteurs favorisant la corrosion.
Protection contre la corrosion : - revêtement ; - anode sacrificielle ; - protection électrochimique par courant imposé.	Exploiter des tracés de courbes courant-potentiel pour expliquer qualitativement : - la qualité de la protection par un revêtement métallique ; - le fonctionnement d'une anode sacrificielle.
Passivation.	Interpréter le phénomène de passivation sur une courbe courant-potentiel. **Mettre en en évidence le phénomène de corrosion et de protection et les facteurs l'influençant.**

Annexe 1 : matériel

Cette liste complète celle donnée en annexe 1 du programme de physique-chimie de PTSI. À elles deux, ces listes regroupent le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée. Une utilisation de matériel hors de ces listes lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une aide.

1. Domaine optique

- Polariseur.
- Interféromètre de Michelson motorisé.
- Capteur photographique numérique.
- Spectromètre à fibre optique.

2. Domaine électrique

- Oscilloscope numérique avec analyseur de spectre.
- Carte d'acquisition dont l'API est publiée.
- Microcontrôleur.
- Émetteur et récepteur dans le domaine des ondes centimétriques.

3. Domaine de la chimie

- Calorimètre.
- Électrode de référence.
- Électrolyseur et électrodes.

Annexe 2 : outils mathématiques

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique de la classe de PT sont d'une part ceux qui figurent dans l'annexe 2 du programme de la classe de PTSI et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » prolonge l'outil « gradient » abordé en première année, en introduisant de nouveaux opérateurs : seules les expressions des opérateurs en coordonnées cartésiennes sont exigibles. Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques et les formules d'analyse vectorielle ne sont pas exigibles ; elles doivent donc être systématiquement rappelées.

Le thème « analyse de Fourier » prolonge l'étude de l'outil « séries de Fourier » abordée en PTSI et réutilisée en classe de PT. On étend la décomposition d'un signal périodique comme somme de ses harmoniques à l'expression d'un signal non périodique sous forme d'une intégrale (synthèse spectrale) ; aucun résultat n'est exigible. On souligne en revanche la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.

Dans le thème « équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant ainsi soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion. L'accent est mis sur le rôle des conditions aux limites.

Les capacités relatives à la notion de différentielle d'une fonction de plusieurs variables sont limitées à l'essentiel, elles sont mobilisées principalement dans le cours de thermodynamique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Analyse vectorielle	
Gradient.	Citer le lien entre le gradient et la différentielle. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes. Utiliser la formule d'analyse vectorielle : $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$.
Cas des champs proportionnels à $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}.\mathbf{r})$ ou à $\exp(i\mathbf{k}.\mathbf{r} - i\omega t)$.	Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur $i\mathbf{k}$.
2. Analyse de Fourier	

Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni. Utiliser un raisonnement par superposition.
Synthèse spectrale d'un signal non périodique.	Utiliser un raisonnement par superposition. Citer et utiliser la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.
3. Équations aux dérivées partielles	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert.	Identifier une équation aux dérivées partielles connue. Transposer une solution connue dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites.
4. Calcul différentiel	
Différentielle d'une fonction de plusieurs variables. Dérivée partielle. Théorème de Schwarz.	Connaître l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Identifier la valeur d'une dérivée partielle, l'expression de la différentielle étant donnée. Utiliser le théorème de Schwarz (admis).

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclut l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique et celui de la chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous complète les outils numériques identifiés dans le programme de physique-chimie de première année de la classe de PTSI.

Outils numériques	**Capacités exigibles**
Représentation graphique d'un champ scalaire ou vectoriel.	Utiliser les fonctions de base (**contour** et **streamplot**) de la bibliothèque **matplotlib** (leurs spécifications étant fournies) pour représenter des lignes de niveau ou des lignes de champ.
Équation de diffusion à une dimension.	Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable.