MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Mathématiques, physique, informatique (MPI)

Annexe 1
Programme de mathématiques

Classes préparatoires MP et MPI
Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.
Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

Objectifs de formation

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels :
- fournir un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes;
- exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé;
- développer l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur;
- promouvoir la réflexion personnelle des étudiantes et étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires scientifiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :
- **chercher, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation, TIPE) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions

entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la théorie des équations différentielles utilise des concepts et des résultats développés en algèbre linéaire ; le calcul différentiel et l'optimisation exploitent en outre les endomorphismes autoadjoints ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et les familles sommables, et illustrent certains résultats d'analyse.
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.
Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

Architecture et contenu du programme

L'étude de chaque domaine du programme (analyse, algèbre, probabilités) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.
Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme d'algèbre comprend trois sections. La première formalise les différentes structures algébriques rencontrées dans le programme, introduit l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme exemple de structure quotient et étudie l'anneau $\mathbb{K}[X]$. La deuxième prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en première année et combine les points de vue géométrique (éléments propres), algébrique (polynômes d'endomorphisme) et matriciel pour aboutir à une théorie de la réduction substantielle : diagonalisation, trigonalisation, sous-espaces caractéristiques. La troisième, située dans le cadre euclidien, étudie la notion d'adjoint, les isométries vectorielles et les endomorphismes autoadjoints (théorème spectral), et introduit les endomorphismes autoadjoints positifs en vue de l'optimisation.

La topologie est étudiée dans le cadre général des espaces vectoriels normés. Son étude permet d'étendre les notions de suite, limite, continuité étudiées en première année dans le cadre de la droite réelle, d'étudier la continuité des applications linéaires (normes subordonnées), d'introduire les concepts de compacité et de connexité par arcs et de mettre en évidence quelques aspects de la dimension finie : équivalence des normes, caractérisation des compacts, continuité des applications linéaires et polynomiales.
La section sur les séries complète l'étude des séries numériques abordée en première année et la prolonge par celles des séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
La définition des différents modes de convergence d'une suite de fonctions bénéficie du cadre topologique introduit dans la section « Espaces vectoriels normés ». L'étude des suites et séries de fonctions conduit aux théorèmes de régularité de leur limite ou somme et aboutit à l'énoncé de deux théorèmes d'approximation.
Les séries entières permettent de construire des fonctions de variable complexe et de fournir un outil pour la résolution d'équations différentielles linéaires.
La section sur les fonctions vectorielles étend rapidement aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie les résultats d'analyse réelle étudiés en première année et fournit des outils pour les équations différentielles et le calcul différentiel.
La section sur l'intégration introduit, pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, la notion d'intégrale généralisée et celle de fonction intégrable. L'intégration des relations de comparaison dans le cas des fonctions positives permet de faire le lien avec les théorèmes similaires étudiés sur les séries.
Les théorèmes sur l'intégration des suites et séries de fonctions (convergence dominée, intégration terme à terme) et sur les intégrales à paramètre concluent cette section.
La section sur les variables aléatoires discrètes introduit rapidement les notions générales de la théorie des probabilités afin d'étendre l'étude menée en première année des variables aléatoires finies, ce qui permet d'élargir le champ des situations se prêtant à une modélisation probabiliste.
La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli, déjà évoquée dans le cursus antérieur des étudiants.
Cette section a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices.

L'étude des équations et des systèmes différentiels est limitée au cas linéaire, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques. L'utilisation dans ce cadre du théorème de Cauchy permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes d'analyse. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet d'utiliser l'exponentielle d'endomorphisme et de mettre en œuvre des techniques de réduction matricielle.

La section sur le calcul différentiel et l'optimisation a pour objectif d'étendre l'étude menée en première année au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie et de donner une introduction à l'optimisation au premier et au second ordre. La différentielle en un point est définie de manière intrinsèque afin d'établir un lien avec l'algèbre linéaire. Les notions de dérivée selon un vecteur ou le long d'un arc, de gradient, de vecteurs tangents à une partie constituent une première approche de la géométrie différentielle. Enfin, l'optimisation au second ordre s'appuie sur les endomorphismes autoadjoints.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

Le programme est décliné en sections. Chaque section comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.

En particulier, l'ordre de présentation des différentes sections ne doit pas être interprété comme un modèle de progression. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différentes sections ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Programme

Structures algébriques usuelles

L'étude des structures algébriques offre l'occasion d'approfondir plusieurs points abordés en première année : arithmétique de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$, congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire, ou, ultérieurement, de la géométrie des espaces euclidiens.

Le paragraphe relatif aux polynômes permet de revenir sur l'étude menée en première année, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique mettant l'accent sur la notion d'idéal.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments sur les groupes	
Intersection de sous-groupes.	
Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe.	
Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$.	
Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Groupe monogène, groupe cyclique.	Groupe des racines n-ièmes de l'unité.
Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.	
Ordre d'un élément d'un groupe.	L'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.
Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^n = e \iff d\|n$.	
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.	La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.
b) Compléments sur les anneaux	
Produit fini d'anneaux.	
Idéal d'un anneau commutatif.	Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs.
Idéal engendré par un élément.	Notation xA.
Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation en termes d'idéaux.
c) Idéaux de $\mathbb{Z}$	
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	
Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Lien avec le programme de première année.
d) Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.	Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier.
Théorème chinois : isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $m \wedge n = 1$; extension à plus de deux facteurs.	Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Indicatrice d'Euler φ. Calcul à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers.	Relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux ; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat.
e) Anneaux $\mathbb{K}[X]$	
Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.	
Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.	
Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ polynômes en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Par convention, le PGCD est unitaire.
Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles unitaires.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme. L'étude des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ pour un corps autre que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est pas un objectif du programme.

f) Algèbres

Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.
Sous-algèbre. Morphisme d'algèbres.	

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en première année. Elle trouve des applications et des illustrations dans d'autres domaines du programme (topologie, équations différentielles, systèmes dynamiques discrets, chaînes de Markov). Elle permet également de tisser des liens entre l'algèbre linéaire et l'algèbre générale, notamment polynomiale.

Le but de cette section est de donner une introduction substantielle au problème de la réduction. Les approches sont de deux types, qu'il convient d'identifier : la première, de nature géométrique, repose sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; la seconde, plus algébrique, fait appel aux polynômes annulateurs.

Sans soulever de difficulté, on signale que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas d'un corps de base quelconque. Pour éviter les difficultés liées aux polynômes en caractéristique non nulle, la section est traité sous l'hypothèse que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Compléments d'algèbre linéaire

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe. Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E=\bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\vert E_i} = u_i$ pour tout i.	Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe. Base adaptée à une décomposition en somme directe.
Matrices définies par blocs. Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	Interprétation géométrique des blocs. La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible. Transvections par blocs. Invariance du déterminant.
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	

b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction matricielle.
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	Le noyau et l'image de u sont stables par v.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.

c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients du polynôme caractéristique de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Multiplicité d'une valeur propre. La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres. Cas des projecteurs, des symétries.
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E.	Caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Dans les exercices pratiques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.	Traduction matricielle.
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle. Cas où χ_u est scindé à racines simples.

e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme. La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.

f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.	
Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.	Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.
L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	

Contenus	Capacités & Commentaires
g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire. Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Les racines de π_u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.	
h) Lemme de décomposition des noyaux	
Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $$\mathrm{Ker}\,(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(P_i(u)).$$	
i) Polynômes annulateurs et réduction	
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme simplement scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé.	Traduction matricielle.
j) Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques	
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.
Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé ; E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.	Dimension d'un sous-espace caractéristique.
Traduction matricielle de cette décomposition : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.	

Endomorphismes d'un espace euclidien

L'objectif de cette section est double :

- *approfondir dans le cadre euclidien la thématique de la réduction des endomorphismes, à travers l'étude des endomorphismes autoadjoints et des isométries ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme symétrique positif, notamment en vue du calcul différentiel d'ordre* 2.

La notion de produit scalaire hermitien est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Adjoint d'un endomorphisme	
Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.	
Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.	Notation u^*.
Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.	
Matrice de l'adjoint en base orthonormée.	
Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.	
b) Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables.
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E, égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.
c) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes.	Par définition, une isométrie vectorielle est linéaire. On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».
Exemples : symétrie orthogonale, réflexion.	
Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte.	
Groupe spécial orthogonal.	Notation $\mathrm{SO}(E)$.
d) Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2.	
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau.	Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
Classification des isométries d'un plan euclidien.	
e) Réduction des isométries	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Réduction d'une isométrie en base orthonormée.	Interprétation matricielle.

Contenus	Capacités & Commentaires
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.

f) Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Contenus	Capacités & Commentaires
Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$.	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathscr{S}(E)$.
Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints.	
Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u.	Interprétation matricielle : une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.

g) Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Contenus	Capacités & Commentaires
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}^+(E), \mathscr{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Topologie des espaces vectoriels normés

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *introduire, dans le cadre des espaces vectoriels normés, le vocabulaire de la topologie ;*
- *donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires) ;*
- *introduire la notion de partie compacte dans un espace vectoriel normé, en soulignant le rôle qu'elle joue dans les résultats d'existence, notamment en matière d'optimisation ;*
- *introduire la notion de composante connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, qui permet de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires et intervient en calcul différentiel ;*
- *dégager l'idée fondamentale d'inégalité linéaire, qui apparaît lors de l'étude de la comparaison des normes et de la continuité des applications linéaires, et qui est quantifiée par la notion de norme d'opérateur.*

Les notions seront illustrées par des exemples variés. On pourra ainsi travailler dans les espaces $\mathbb{K}^n$, les espaces de polynômes, d'applications linéaires ou de matrices, ainsi que dans divers espaces fonctionnels.

Il convient de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment à l'aide de nombreuses figures. Lors de l'étude de la connexité par arcs, un dessin pertinent peut valoir preuve.

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme. Il en est de même des notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach.

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Normes et espaces vectoriels normés

Contenus	Capacités & commentaires
Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Parties, suites, fonctions bornées.	
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes $\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Notation $\| \|_\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.	Notations $\| \|_1$ et $\| \|_2$.
Produit fini d'espaces vectoriels normés.	

b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

c) Comparaison des normes

Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.

d) Topologie d'un espace normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie.	Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.
Voisinage d'un point.	
Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.
Point intérieur, point adhérent.	
Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.	
Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense.	
Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Par définition, une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E. Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans A des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E.

e) Étude locale d'une application, continuité

Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.	
Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.	Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie non vide de E.
f) Applications linéaires et multilinéaires continues	
Critère de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés : $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$	Notation $\mathscr{L}_c(E, F)$.
Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue.	Notations $\|\|\|u\|\|\|$, $\|u\|_{\text{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathscr{L}_c(E, F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices.
Critère de continuité des applications multilinéaires.	La démonstration n'est pas exigible.
g) Parties compactes d'un espace normé	
Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
Une partie compacte est fermée et bornée.	
Un fermé relatif d'une partie compacte est compact.	
Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.	
Produit d'une famille finie de compacts.	
h) Applications continues sur une partie compacte	
Image continue d'une partie compacte.	
Théorème de Heine.	
Théorème des bornes atteintes pour une application numérique définie et continue sur un compact non vide.	On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation, notamment en mettant en évidence des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact.
i) Connexité par arcs	
Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points ; partie connexe par arcs.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes sont les composantes connexes par arcs.
Cas des parties convexes, des parties étoilées.	
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.
j) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration n'est pas exigible.
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.	La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.	
Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.	
Si E est de dimension finie, $\mathscr{L}(E,F)=\mathscr{L}_c(E,F)$.	
Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemples : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.

Séries numériques et vectorielles

L'objectif de cette section est double :

- *consolider les acquis de première année relatifs aux séries numériques, en particulier à travers l'étude de questions de calcul asymptotique ;*
- *étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie.*

Les séries sont avant tout un outil. L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série, séries télescopiques.	
Série absolument convergente.	
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.
Règle de d'Alembert.	
Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.	La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).

Suites et séries de fonctions, séries entières

A - Suites et séries de fonctions

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *définir différents modes usuels de convergence des suites et séries de fonctions ;*
- *étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;*
- *introduire la thématique de l'approximation, reliée à la notion topologique de densité, à travers deux théorèmes d'approximation uniforme susceptibles de nombreuses applications.*

La technique n'est pas un but en soi. On privilégie les exemples significatifs : construction de fonctions solutions de problèmes (équations fonctionnelles ou différentielles, par exemple), mise en évidence de fonctions aux propriétés remarquables...

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A, alors u est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.	La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.
c) Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.
d) Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u' = v$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (u'_n) sur des intervalles adaptés à la situation.

Contenus	Capacités & Commentaires
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(u_n^{(k)})$.	En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.
e) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme.	La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.
f) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.	
Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible.

B - Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;*
- *introduire la notion de fonction développable en série entière ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières donnent un outil puissant pour aborder certains calculs : résolution d'équations différentielles linéaires, fonctions génératrices en probabilités... Elles permettent également de revenir sur la thématique de la régularité des fonctions, introduite en première année, et donnent l'occasion d'introduire la « variable complexe ».

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe. Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	
Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert < R$, et elle diverge grossièrement si $\lvert z\rvert > R$.
Si $a_n = O(b_n)$ et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.	Rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}$ peut être utilisée directement.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe	
Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.	
c) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle	
Théorème d'Abel radial : si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.	La démonstration est hors programme.
La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.
d) Fonctions développables en série entière, développements usuels	
Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, sur l'intervalle $]-R, R[$.	Dans le cas réel, lien avec la série de Taylor.
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$. Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ \lvert z\rvert < 1\}$.	
Développements usuels dans le domaine réel.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Fonctions vectorielles

Cette section a deux objectifs :

- *étendre rapidement le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;*
- *fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.*

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. Traduction en termes de coordonnées dans une base.
Dérivabilité à droite et à gauche.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L(f)$, où L est linéaire.	
Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est multilinéaire.	Cas du produit scalaire, du déterminant.

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivabilité et dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle. Applications de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	
c) Intégration sur un segment	
Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$. Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Pour L linéaire, intégrale de $L(f)$. Inégalité triangulaire $\left\Vert\int_a^b f\right\Vert \leqslant \int_a^b \Vert f\Vert$. Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
d) Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
e) Formules de Taylor	
Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	

Intégration sur un intervalle quelconque

L'objectif de cette section est triple :

- *définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, les notions d'intégrale convergente et d'intégrabilité sur un intervalle non compact ;*
- *donner des outils efficaces de passage à la limite sous l'intégrale, en particulier le théorème de convergence dominée ;*
- *compléter l'étude des séries de fonctions par celle des intégrales à paramètre.*

La technique n'est pas un but en soi. On privilégie donc les exemples significatifs : transformées intégrales (Fourier, Laplace), intégrales eulériennes...

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou des nombres complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x\mapsto\int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en $+\infty$. Dérivation de $x\mapsto\int_x^{+\infty} f$ si f est continue.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.	Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.	
Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$.	

b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} \lvert f\rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ». Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a,+\infty[$. Un calcul montrant que $\int_I \lvert f\rvert < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$: – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	Le résultat s'applique en particulier si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$.

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente en b, en a. Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente. Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Contenus	Capacités & commentaires
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ». Fonction intégrable en b, en a.
Espace $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.	Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.
Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle. Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.	
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}\mathrm{d}x$.	La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

e) Intégration des relations de comparaison

Contenus	Capacités & commentaires
Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est réelle de signe constant.

f) Convergence dominée

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Contenus	Capacités & commentaires
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	La démonstration est hors programme.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	

g) Intégration terme à terme

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Contenus	Capacités & commentaires
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0,+\infty]$, $$\int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Contenus	Capacités & Commentaires
Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que $$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I \lvert f_n(t)\rvert\,\mathrm{d}t < +\infty,$$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et $$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables. On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

h) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Contenus	Capacités & Commentaires
Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : – pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est continue ; – pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux ; – il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x,\cdot)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : – pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; – pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I ; – pour tout $x \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right\rvert \leqslant \varphi$. Alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $$\forall x \in A, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$.	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.

Variables aléatoires discrètes

Cette section généralise aux variables aléatoires discrètes l'étude menée en première année des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu, introduite pour donner un cadre rigoureux, n'appelle aucun développement théorique ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
- *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

La théorie des familles sommables permet une extension très naturelle des notions et résultats vus en première année. Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices. L'objectif de l'enseignement est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les étudiants sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices...) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov...).

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Les ensembles $\mathbb{N}^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	La démonstration n'est pas exigible.
b) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.	La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Probabilité sur un espace probabilisable, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.	
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).	Systèmes quasi-complets d'événements. Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles et indépendance	
Extension des résultats vus en première année : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.	Notations $P_B(A)$, $P(A\|B)$.
Par définition, les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	Lorsque $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\,\|\,B) = P(A)$.
Famille d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Espaces probabilisés discrets	
Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1.	Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable.
Probabilité définie sur $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.	Si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathscr{P}(\Omega)$.
e) Variables aléatoires discrètes	
Une variable aléatoire discrète X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans E est une application définie sur Ω, à valeurs dans l'ensemble E, telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à $\mathscr{A}$.	Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$. Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire X est dite réelle. Notations $(X \leqslant x), (X \geqslant x), (X < x), (X > x)$ (et analogues avec accolades) pour une variable aléatoire réelle X.
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X.	La loi de X peut au besoin être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$.
Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.	
La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.	
Notation $X \sim Y$.	La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.
Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.	Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires indépendantes, famille finie de variables aléatoires indépendantes.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est le produit des distributions de probabilités de X et Y. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes.	
Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$	Extension au cas de plus de deux variables.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
g) Lois usuelles	
Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p. Variable géométrique de paramètre p.	Notations $\mathscr{G}(p)$, $X \sim \mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans le jeu de pile ou face infini.
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ. Variable de Poisson de paramètre λ.	Notations $\mathscr{P}(\lambda)$, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.

Contenus	Capacités & Commentaires

h) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de X est la somme, dans $[0,+\infty]$, de la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, égalité $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	Notation $\mathrm{E}(X)$.
Une variable aléatoire complexe X est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.	Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées. La notation $X \in L^1$ signifie que X est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^1.
Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)\,P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable; si tel est le cas : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x)$.	
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle.
Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.	
Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	Extension au cas de n variables aléatoires.

i) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Si $\mathrm{E}\big(X^2\big) < +\infty$, X est d'espérance finie.	La notation $X \in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2, XY est dans L^1 et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}\big(X^2\big)\,\mathrm{E}\big(Y^2\big)$.	Cas d'égalité.
Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X.	Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\big(X^2\big) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. Covariance de deux variables aléatoires de L^2. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes. Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorrélées.	

j) Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m\right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$.	Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
k) Fonctions génératrices	
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\,t^k$. Détermination de la loi de X par G_X.	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour le calcul de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	

Équations différentielles linéaires

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1*, équation scalaire homogène d'ordre* 2 *à coefficients constants.*

La pratique de la résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limite en conséquence la technicité des exercices sur ce point. On peut en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2*, représenter les courbes intégrales.*

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)\cdot x + b(t)$$	Forme matricielle : système différentiel linéaire $$X' = A'(t)X + B(t).$$
où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E. Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	La démonstration n'est pas exigible. Adaptation aux systèmes différentiels linéaires.
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées : $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$, $\quad a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$.	Exemples de recherche de solutions développables en série entière.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe. Exponentielle d'une matrice diagonale. Exponentielle de matrices semblables. Spectre de $\exp(A)$. Continuité de l'exponentielle sur $\mathscr{L}(E)$, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Dérivation de $t \mapsto \exp(ta)$ de $t \mapsto \exp(tA)$. Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants : a diagonalisable ou $\dim(E) \leqslant 3$.
e) Variation des constantes	
Pour une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, wronskien d'un couple de solutions. Caractérisation des bases de l'espace des solutions. Méthode de variation des constantes pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.	

Calcul différentiel et optimisation

En première année, l'étudiant a rencontré les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *généraliser et approfondir cette étude, en présentant les notions fondamentales de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$;*
- *donner une introduction à la thématique de l'optimisation, en lien avec le théorème des bornes atteintes du cours de topologie.*

On souligne le caractère géométrique des notions. En particulier, on exploite la possibilité de se ramener, pour un certain nombre de questions, à des fonctions d'une variable réelle, à travers l'utilisation de la formule donnant la dérivée d'une fonction le long d'un arc et la notion de vecteur tangent à une partie en un point.

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé F de dimension finie.

Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \ldots, x_n)$.
b) Différentielle	
Application différentiable au point a.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1. Lorsque $f = (f_1, \ldots, f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si toutes les f_i le sont.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Unicité de la différentielle et relation $\mathrm{d}f(a)\cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$.	Notation $\mathrm{d}f(a)$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω.	Notation $\mathrm{d}f$.
Cas particuliers : application constante, application linéaire.	
Lien entre différentielle et dérivées partielles.	Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, la matrice jacobienne de f en a est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques.
Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1$.	
Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.	Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique : si $\nabla f(a) \neq 0$, $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

c) Opérations sur les applications différentiables

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1,\dots,f_p)$ où M est multilinéaire et où $f_1,\dots,f_p$ sont des applications différentiables.	
Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + tv$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	Dérivées partielles de $$(u_1,\dots,u_m) \mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m)).$$

d) Applications de classe $\mathscr{C}^1$

Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.	
L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors : $$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$ pour tout $t \in [0,1]$.
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.	Démonstration pour Ω convexe.

e) Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$, à valeurs dans X, dérivable en 0, tel que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.	Notation T_xX pour l'ensemble des vecteurs tangents à X en x. Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien, graphe d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si g est une fonction numérique définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si $x \in X$ et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors $T_x X$ est égal au noyau de $\mathrm{d}g(x)$.	La démonstration de cet énoncé et le théorème des fonctions implicites sont hors programme. Traduction en termes de gradient si E est euclidien, en particulier pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Exemple : plan tangent à une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une équation.

f) Optimisation : étude au premier ordre

Contenus	Capacités & Commentaires
Point critique d'une application différentiable.	
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur. Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω, si X est une partie de Ω, si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x.	Exemples de recherches d'extremums globaux.
Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si X est l'ensemble des zéros de g, si $x \in X$et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$.	Si E est euclidien, traduction en termes de gradient. Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.

g) Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.	Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \ldots \partial x_{j_1}}$, $\partial_{j_k} \ldots \partial_{j_1} f$, $\partial_{j_1,\ldots,j_k} f$.
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.	La notion de différentielle seconde est hors programme.
Théorème de Schwarz.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

h) Optimisation : étude au second ordre

Contenus	Capacités & Commentaires
Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.	Notation $H_f(x)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x)\cdot h, h\rangle + o(\Vert h\Vert^2)$, $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\Vert h\Vert^2)$.	La démonstration n'est pas exigible.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en x, alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.	Adaptation au cas d'un maximum local.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x.	Adaptation au cas d'un maximum local. Explicitation pour $n = 2$ (trace et déterminant).

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Mathématiques, physique, informatique (MPI)

Annexe 2
Programme de physique-chimie

Programme de physique-chimie de la voie MPI

Préambule

Objectifs de formation

Le programme de physique-chimie de la classe de MPI est conçu comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités scientifiques s'appuyant sur celles déjà travaillées au lycée et en classe de MPII, option sciences informatiques. Le programme vise à préparer les étudiants à un cursus d'ingénieur, de chercheur ou d'enseignant. Il s'agit de renforcer chez l'étudiant les compétences inhérentes à la pratique de la démarche scientifique : observer et s'approprier, analyser et modéliser, réaliser et valider, et enfin communiquer et valoriser ses résultats.

L'acquisition de ce socle par les étudiants constitue un objectif prioritaire pour l'enseignant. Parce que la physique et la chimie sont avant tout des sciences expérimentales qui développent la curiosité, la créativité et l'analyse critique, l'expérience est au cœur de son enseignement, que ce soit en cours ou lors des séances de travaux pratiques. Les activités expérimentales habituent les étudiants à se confronter au réel, comme ces derniers auront à le faire dans l'exercice de leur métier.

De même, l'introduction de capacités numériques dans le programme prend en compte la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation. Elles offrent aux étudiants la possibilité d'effectuer une modélisation avancée du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires.

La démarche de modélisation occupe également une place centrale dans le programme pour former les étudiants à établir, de manière autonome, un lien fait d'allers-retours entre le « monde » des objets, des expériences, des faits, et celui des modèles et des théories. L'enseignant doit rechercher un point d'équilibre entre des approches complémentaires : conceptuelle et expérimentale, abstraite et concrète, théorique et appliquée, inductive et déductive, qualitative et quantitative. La construction d'un modèle passe aussi par l'utilisation maîtrisée des mathématiques dont un des fondateurs de la physique expérimentale, Galilée, énonçait déjà qu'elles sont le langage dans lequel est écrit le monde.

Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les étudiants à mobiliser de façon complémentaire connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Organisation du programme

Le programme est organisé en deux parties.

Dans la première partie, intitulée « **Formation expérimentale** », sont décrits les objectifs de formation sur le thème « Mesures et incertitudes » ainsi que les méthodes et les capacités expérimentales que les étudiants doivent maîtriser à la fin de l'année scolaire. Leur mise en œuvre doit notamment s'appuyer sur des problématiques concrètes de la seconde partie du programme intitulée « **Contenus thématiques** ». Elles doivent être programmées par l'enseignant de façon à assurer un apprentissage progressif de l'ensemble des capacités attendues.

La seconde partie, intitulée « **Contenus thématiques** » est structurée autour de sept thèmes **:** « Mécanique », « Éléments de traitement du signal », « Optique », « Électromagnétisme », « Thermodynamique : transferts thermiques », « Physique quantique », « Transformation de la matière ». La présentation en deux colonnes (« notions et contenus » et « capacités exigibles ») met en valeur les éléments clefs constituant le socle de connaissances et de capacités dont l'assimilation par tous les étudiants est requise.
Certains items de cette seconde partie**, identifiés en caractères gras** dans la colonne capacités exigibles, se prêtent particulièrement à une approche expérimentale. Ils doivent être abordés en priorité lors de séances de travaux pratiques où l'autonomie et l'initiative individuelle de l'étudiant doivent être privilégiées. La présence de capacités numériques explicitées atteste par ailleurs de la volonté de renforcer ce volet de la formation des étudiants.

Trois annexes sont consacrées d'une part au matériel nécessaire à la mise en œuvre des programmes, d'autre part aux outils mathématiques et aux outils numériques que les étudiants doivent savoir mobiliser de façon autonome dans le cadre des enseignements de physique-chimie à la fin de l'année de la classe de MPI.

Ce programme précise les objectifs de formation à atteindre pour tous les étudiants. Il n'impose en aucun cas une progression ; celle-ci relève de la liberté pédagogique de l'enseignant.

Les compétences travaillées dans le cadre de la démarche scientifique

L'ensemble des activités proposées en classe préparatoire aux grandes écoles – activités expérimentales, résolutions de problèmes, TIPE, etc. – permet de travailler les compétences de la démarche scientifique qui figurent dans le tableau ci-dessous. Des capacités associées sont explicitées afin de préciser les contours de chaque compétence, elles ne constituent donc pas une liste exhaustive et peuvent parfois relever de plusieurs domaines de compétences. L'ordre de présentation de ces compétences ne préjuge pas d'un ordre de mobilisation de ces dernières lors d'une activité.

Les compétences doivent être acquises à l'issue de la formation en CPGE. Elles nécessitent d'être régulièrement mobilisées par les étudiants et sont évaluées en s'appuyant, par exemple, sur l'utilisation de grilles d'évaluation.

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier	- Rechercher, extraire et organiser l'information en lien avec la situation étudiée. - Identifier la complémentarité d'informations présentées sous des formes différentes (texte, graphe, tableau, etc.). - Énoncer ou dégager une problématique scientifique. - Représenter la situation par un schéma modèle. - Identifier les grandeurs pertinentes, leur attribuer un symbole. - Relier le problème à une situation modèle connue. - Acquérir de nouvelles connaissances en autonomie.

Analyser / Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Décomposer un problème en plusieurs problèmes plus simples. - Proposer une stratégie pour répondre à une problématique. - Choisir, concevoir, justifier un protocole, un dispositif expérimental, un modèle ou des lois physiques. - Évaluer des ordres de grandeur. - Identifier les idées essentielles d'un document et leurs articulations. - Relier qualitativement ou quantitativement différents éléments d'un ou de documents.
Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche, un protocole, un modèle. - Extraire une information d'un texte, d'un graphe, d'un tableau, d'un schéma, d'une photo. - Schématiser un dispositif, une expérience, une méthode de mesure. - Utiliser le matériel et les produits de manière adaptée en respectant des règles de sécurité. - Effectuer des représentations graphiques à partir de données. - Mener des calculs analytiques ou à l'aide d'un langage de programmation, effectuer des applications numériques. - Conduire une analyse dimensionnelle.
Valider	- Exploiter des observations, des mesures en estimant les incertitudes. - Confronter les résultats d'un modèle à des résultats expérimentaux, à des données figurant dans un document, à ses connaissances. - Confirmer ou infirmer une hypothèse, une information. - Analyser les résultats de manière critique. - Repérer les points faibles d'une argumentation (contradiction, partialité, incomplétude, etc.). - Proposer des améliorations de la démarche ou du modèle.

Communiquer	- À l'écrit comme à l'oral :
	  o présenter les étapes de sa démarche de manière synthétique, organisée et cohérente.
	  o rédiger une synthèse, une analyse, une argumentation.
	  o utiliser un vocabulaire scientifique précis et choisir des modes de représentation adaptés (schémas, graphes, cartes mentales, etc.).
	- Écouter, confronter son point de vue.

Le niveau de maîtrise de ces compétences dépend de **l'autonomie et de l'initiative** requises dans les activités proposées aux étudiants sur les notions et capacités exigibles du programme.

La mise en œuvre des programmes doit aussi être l'occasion d'aborder avec les étudiants des questions liées à l'histoire de l'évolution des idées, des modèles et des théories en physique-chimie, à des questions liées à la recherche scientifique actuelle et à des enjeux citoyens comme la responsabilité individuelle et collective, la **sécurité** pour soi et pour autrui, l'**environnement** et le **développement durable** ou encore le **réchauffement climatique**.

Repères pour l'enseignement

Dans le cadre de la liberté pédagogique, l'enseignant organise son enseignement en respectant trois grands principes directeurs :

- privilégier la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances, des capacités et des compétences est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Les supports pédagogiques utilisés doivent notamment favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie des étudiants. L'investigation expérimentale et la résolution de problèmes facilitent cette mise en activité ;
- recourir à la mise en contexte des contenus scientifiques : le questionnement scientifique peut être introduit à partir de phénomènes naturels, de procédés industriels ou d'objets technologiques. Le recours à des approches documentaires est un moyen pertinent pour diversifier les supports d'accès à l'information scientifique et technologique et ainsi former l'étudiant à mieux en appréhender la complexité et à apprendre par lui-même. Lorsque le thème traité s'y prête, l'enseignant peut le mettre en perspective avec l'histoire des sciences et des techniques, avec des questions d'actualité ou des débats d'idées ;
- contribuer à la nécessaire mise en cohérence des enseignements scientifiques ; la progression en physique-chimie doit être articulée avec celles mises en œuvre dans les autres disciplines scientifiques : mathématiques, informatique, sciences industrielles de l'ingénieur.

Concernant l'évaluation, qui vise à mesurer le degré de maîtrise du socle ainsi défini et le niveau d'autonomie et d'initiative des étudiants, l'enseignant veille soigneusement à identifier les compétences et les capacités mobilisées dans les activités proposées afin d'en élargir le plus possible le spectre.

Enfin, le professeur veille aussi à développer chez les étudiants des compétences transversales et préprofessionnelles relatives aux capacités suivantes :

- identifier les différents champs professionnels et les parcours pour y accéder ;
- valoriser ses compétences scientifiques et techniques en lien avec son projet de poursuite d'études ou professionnel.

Formation expérimentale

Cette partie est spécifiquement dédiée à la mise en œuvre de la formation expérimentale des étudiants lors des séances de travaux pratiques.

Dans un premier temps, elle précise les connaissances et savoir-faire qui doivent être acquis dans le domaine de la mesure et de l'évaluation des incertitudes. Elle présente ensuite de façon détaillée l'ensemble des capacités expérimentales qui doivent être acquises en autonomie par les étudiants à l'issue de leur seconde année de CPGE. Enfin, elle aborde la question de la prévention du risque au laboratoire de physique-chimie.

Une liste de matériel, que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice succincte, figure dans l'annexe 1 du présent programme.

1. Mesures et incertitudes

Les notions et capacités identifiées ci-dessous couvrent les deux années de formation en classe préparatoire aux grandes écoles ; leur pleine maîtrise est donc un objectif de fin de seconde année.
L'accent est mis sur la variabilité de la mesure d'une grandeur physique et sa caractérisation à l'aide de l'incertitude-type. La comparaison entre deux valeurs mesurées d'une même grandeur physique est conduite au moyen de l'écart normalisé, l'objectif principal étant de développer l'esprit critique des étudiants en s'appuyant sur un critère quantitatif. Le même esprit prévaut dans l'analyse des résultats d'une régression linéaire qui ne saurait s'appuyer sur l'exploitation non raisonnée du coefficient de corrélation (R^2).
Le recours à la simulation vise à illustrer, sur la base de mesures expérimentales, différents effets de la variabilité de la mesure d'une grandeur physique dans les cas des incertitudes-types composées et de la régression linéaire.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.

Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

2. Mesures et capacités expérimentales

Cette partie présente l'ensemble des capacités expérimentales nouvelles que les étudiants doivent acquérir au cours de l'année de MPI durant les séances de travaux pratiques. Elle vient prolonger la partie correspondante du programme de MPII, option sciences informatiques dont les capacités doivent être complètement acquises à l'issue des deux années de préparation, et restent donc au programme de la classe de MPI.

Les capacités rassemblées ici ne constituent en aucun cas une liste de travaux pratiques qui s'articuleraient autour d'une découverte du matériel, mais doivent au contraire faire l'objet d'un apprentissage progressif contextualisé où chaque élément apparaît naturellement à l'occasion d'un problème concret. À ce titre, elle vient compléter la liste des thèmes d'étude – en gras dans la colonne « capacités exigibles » de la partie « **Contenus thématiques** » – à partir desquels la problématique d'une séance peut être définie.

Nature et méthodes	**Capacités exigibles**
1. Mesures de temps et de fréquences	
Analyse spectrale.	Mettre en évidence le phénomène de repliement du spectre provoqué par l'échantillonnage avec un oscilloscope numérique ou une carte d'acquisition. Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon, tout en optimisant la résolution spectrale.
2. Électricité et électronique	
Filtrage analogique d'un signal périodique.	Mettre en évidence l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique dans les domaines fréquentiel et temporel.
Électronique numérique.	Utiliser un convertisseur analogique-numérique et un convertisseur numérique-analogique.
Électronique logique.	Mettre en œuvre divers montages utilisant des portes logiques.

3. Optique	
Analyse d'une lumière.	Identifier, à l'aide d'un polariseur, une onde polarisée rectilignement et déterminer sa direction de polarisation.
Analyse d'une figure d'interférence.	Mettre en œuvre un photodétecteur en sortie d'un interféromètre.
Cohérence temporelle d'une source.	Régler un interféromètre de Michelson compensé pour une observation en lame d'air avec une source étendue à l'aide d'un protocole fourni. Obtenir une estimation de la longueur de cohérence d'une source et de l'écart spectral d'un doublet à l'aide d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air.
4. Thermodynamique	
Conduction thermique.	Mettre en œuvre un dispositif de mesure de conductivité thermique.
5. Transformation de la matière	
Mesures de grandeurs physique en chimie : volume, masse, pH, absorbance, tension électrique et intensité du courant.	Sélectionner et utiliser le matériel adapté à la précision requise. Préparer une solution de concentration en masse ou en quantité de matière donnée avec le matériel approprié. Étalonner une chaîne de mesure si nécessaire.
Dosage par titrage acide-base. Suivis d'un titrage par pH-métrie et par indicateurs colorés. Repérage de l'équivalence.	Mettre en œuvre un protocole expérimental correspondant à un titrage acide-base. Choisir et utiliser un indicateur coloré de fin de titrage dans le cas d'un titrage acide-base. Exploiter la réaction support de titrage et déterminer la grandeur recherchée.
Réalisation et étude de piles.	Mettre en œuvre des piles et déterminer leurs caractéristiques à vide ou en fonctionnement.

3. Prévention du risque au laboratoire de physique-chimie

Les étudiants doivent prendre conscience du risque lié à la manipulation et au rejet des produits chimiques. L'apprentissage et le respect des règles de sécurité chimique, électrique, optique et celles liées à la pression et à la température leur permettent de prévenir et de minimiser ce risque. Futurs ingénieurs, chercheurs, enseignants, ils doivent être sensibilisés au respect de la législation et à l'impact de leur activité sur l'environnement

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Prévention des risques au laboratoire	Adopter une attitude responsable et adaptée au travail en laboratoire. Développer une attitude autonome dans la prévention des risques.
- **Risque chimique** Règles de sécurité au laboratoire. Classes et catégories de danger. Pictogrammes de sécurité pour les produits chimiques. Mentions de danger (H) et conseils de prudence (P). Fiches de sécurité.	Relever les indications sur le risque associé au prélèvement, au mélange et au stockage des produits chimiques et adopter une attitude responsable lors de leur utilisation.
- **Risque électrique**	Adopter une attitude responsable lors de l'utilisation d'appareils électriques.
- **Risque optique**	Utiliser les sources laser et les diodes électroluminescentes de manière adaptée.
- **Risques liés à la pression et à la température**	Adopter une attitude responsable lors de manipulations de corps chauds ou de dispositifs engageant des hautes ou des basses pressions.
2. Prévention de l'impact environnemental Traitement et rejet des espèces chimiques.	Adapter le mode d'élimination d'une espèce chimique ou d'un mélange en fonction des informations recueillies sur la toxicité ou les risques. Sélectionner, parmi plusieurs modes opératoires, celui qui minimise les impacts environnementaux.

Contenus thématiques

Les contenus de la formation sont organisés autour de sept thèmes.

1. Mécanique

1.1. Référentiels non galiléens
1.2. Lois du frottement solide

2. Éléments de traitement du signal

2.1. Signaux périodiques
2.2. Électronique numérique
2.3. Portes logiques
2.4. Logique séquentielle et stabilité

3. Optique

3.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses
3.2. Superposition d'ondes lumineuses
3.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young
3.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue

4. Électromagnétisme

4.1. Électrostatique
4.2. Magnétostatique
4.3. Équations de Maxwell
4.4. Énergie du champ électromagnétique
4.5. Propagation et rayonnement

5. Thermodynamique : transferts thermiques

6. Physique quantique

6.1. Fonction d'onde et équation de Schrödinger
6.2. Particule libre
6.3. États stationnaires d'une particule dans des potentiels constants par morceaux
6.4. États non stationnaires d'une particule dans un puits de potentiel infini

7. Transformation de la matière

7.1 Transformations chimiques d'un système
7.2 Acides et bases, réactions acide-base
7.3 Oxydants et réducteurs, réactions d'oxydo-réduction

1. Mécanique

Le programme de mécanique de MPI vise à compléter les acquis de mécanique de la classe de MPII, option sciences informatiques. Il est structuré en deux sous-parties : la première est consacrée aux changements de référentiels, la seconde aux conséquences mécaniques des actions de frottements entre solides.

La partie « **Référentiels non galiléens** » est organisée autour de deux situations : la translation et la rotation uniforme autour d'un axe fixe. L'accent est mis sur la compréhension qualitative des effets observés, l'évaluation des ordres de grandeurs et les conséquences expérimentales.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.1. Référentiels non galiléens	
Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre dans les cas du mouvement de translation et du mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe.	Identifier et caractériser un mouvement de translation et un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un référentiel par rapport à un autre.
Vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.	Exprimer le vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.

Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'une translation, et dans le cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe : vitesse d'entraînement, accélérations d'entraînement et de Coriolis.	Relier les dérivées d'un vecteur dans des référentiels différents par la relation de la dérivation composée. Citer et utiliser les expressions de la vitesse d'entraînement et des accélérations d'entraînement et de Coriolis.
Dynamique du point en référentiel non galiléen dans le cas où le référentiel entraîné est en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Forces d'inertie.	Exprimer les forces d'inerties, dans les seuls cas où le référentiel entraîné est en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Décrire et interpréter les effets des forces d'inertie dans des cas concrets : sens de la force d'inertie d'entraînement dans un mouvement de translation ; caractère centrifuge de la force d'inertie d'entraînement dans le cas où le référentiel est en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen. Utiliser les lois de la dynamique en référentiel non galiléen dans les seuls cas où le référentiel entraîné est en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen.
Caractère galiléen approché d'un référentiel. Exemple du référentiel de Copernic, du référentiel géocentrique et du référentiel terrestre.	Citer quelques manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre. Estimer, en ordre de grandeur, la contribution de la force d'inertie de Coriolis dans un problème de dynamique terrestre.

La partie « **Lois du frottement solide** », est limitée au seul cas de la translation ; elle permet de mettre en œuvre un mode de raisonnement spécifique et particulièrement formateur, sans pour autant omettre les conséquences expérimentales

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Lois du frottement solide	
Contact entre deux solides. Aspects microscopiques. Lois de Coulomb du frottement de glissement dans le seul cas d'un solide en translation. Aspect énergétique.	Utiliser les lois de Coulomb dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider. Effectuer un bilan énergétique. **Effectuer une mesure d'un coefficient de frottement.** <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, simuler une situation mécanique dans laquelle intervient au moins un changement de mode de glissement.

2. Éléments de traitement du signal

Ce thème du programme, décomposé en quatre parties, complète l'étude des circuits électriques linéaires menée dans la partie « **Ondes et signaux** » du programme de MPII, option sciences informatiques. Les capacités exigibles ont vocation à être principalement développées au cours de séances de travaux pratiques.

Dans la première partie intitulée « **Signaux périodiques** », l'accent est mis sur l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique, l'objectif étant de comprendre le rôle central de la linéarité des systèmes pour interpréter la forme du signal de sortie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Signaux périodiques	
Signaux périodiques.	Commenter le spectre d'un signal périodique : selon leur rang, attribuer aux différents harmoniques le rôle qu'elles jouent dans la forme du signal analysé.
Action d'un filtre linéaire du premier ou du second ordre sur un signal périodique.	Prévoir l'effet d'un filtrage linéaire sur la composition spectrale d'un signal périodique. Expliciter les conditions pour obtenir un comportement intégrateur ou dérivateur. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'action d'un filtre sur un signal périodique**.

La partie « **Électronique numérique** » est à vocation uniquement expérimentale ; elle constitue une initiation au traitement numérique des signaux à travers les points suivants : l'échantillonnage et le repliement de spectre, la conversion analogique/numérique et le filtrage numérique. Le phénomène de repliement de spectre est présenté qualitativement au moyen d'illustrations démonstratives, l'objectif étant de mettre en place la condition de Nyquist-Shannon afin de réaliser convenablement une acquisition numérique. Un filtrage numérique, du type passe-bas, est réalisé à l'aide d'un convertisseur analogique/numérique et d'un traitement numérique, un convertisseur numérique/analogique restitue ensuite un signal de sortie analogique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2. Électronique numérique	
Échantillonnage : fréquence d'échantillonnage. Conséquences expérimentales du théorème de Nyquist-Shannon.	**Réaliser l'échantillonnage d'un signal. Choisir la fréquence d'échantillonnage afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon. Commenter la structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage. Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'un logiciel de calcul numérique.** <u>Capacité numérique</u> : calculer, à l'aide d'un langage de programmation, la transformée de Fourier discrète d'un signal numérique.

Filtrage numérique.	**Mettre en œuvre un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas ; utiliser un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique.** Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler un filtrage numérique et visualiser son action sur un signal périodique.

Les deux dernières parties intitulées « **Portes logiques** » et « **Logique séquentielle et stabilité** » visent à étudier les composants fondamentaux des circuits logiques ainsi que quelques propriétés de tels circuits permettant la réalisation de dispositifs fréquemment mis en œuvre dans les matériels informatiques.
On se limite à des systèmes comportant un nombre raisonnable de composants. La connaissance des circuits électroniques constituant les portes et bascules est hors programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3 Portes logiques	
Interrupteurs commandés par une tension. Porte logique NOT. Portes logiques AND, OR, NAND, NOR à deux ou plusieurs entrées. Porte logique XOR.	Déterminer la table de vérité d'une association d'interrupteurs commandés par une tension. Identifier par sa table de vérité la porte logique réalisée par une association d'interrupteurs commandés par une tension.

2.4 Logique séquentielle et stabilité	
États stables. Circuits astable, monostable, bistable.	Déterminer les états stables d'un circuit contenant des portes logiques, avec rétroaction. **Réaliser un oscillateur à l'aide d'un circuit astable à portes logiques.** **Réaliser un convertisseur fréquence tension utilisant un circuit monostable à porte logique.**
Bascule RS à portes NAND ou NOR.	Décrire le fonctionnement d'une bascule RS dont le schéma est fourni. Expliquer comment réaliser une mémoire à l'aide d'un circuit bistable.
Chronogramme.	Déterminer le chronogramme des grandeurs électriques pertinentes d'un circuit comportant des portes logiques.

3. Optique

Le programme d'optique de la filière MPI s'inscrit dans le prolongement du thème « **Ondes et signaux** » du programme de MPII, option sciences informatiques. Il s'agit pour les étudiants d'approfondir l'étude des phénomènes d'interférences lumineuses, dans le cadre du modèle ondulatoire de la lumière. L'approche reste centrée sur l'expérience, mais la modélisation doit permettre d'analyser de façon raisonnée les conditions optimales d'observation d'interférences lumineuses, et leur exploitation quantitative. L'enseignant ne manquera pas de rappeler que ces phénomènes, étudiés ici dans le cadre de l'optique, sont généralisables à tout comportement ondulatoire.

La partie « **Modèle scalaire des ondes lumineuses** » introduit les outils nécessaires pour décrire les phénomènes d'interférences. Le programme utilise le mot « intensité » pour décrire la grandeur détectée mais on peut utiliser indifféremment les mots « intensité » ou « éclairement » sans chercher à les distinguer à ce niveau. L'intensité lumineuse est introduite comme une puissance par unité de surface. Le théorème de Malus (orthogonalité des rayons de lumière et des surfaces d'ondes) est admis.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.1. Modèle scalaire des ondes lumineuses	
Modèle de propagation dans l'approximation de l'optique géométrique.	Utiliser une grandeur scalaire pour décrire un signal lumineux.
Chemin optique. Déphasage dû à la propagation. Surfaces d'ondes. Théorème de Malus (admis). Onde plane, onde sphérique ; effet d'une lentille mince dans l'approximation de Gauss.	Exprimer le retard de phase en un point (par rapport à un autre) en fonction de la durée de propagation ou du chemin optique. Associer une description de la formation des images en termes de rayon lumineux et en termes de surfaces d'onde. Utiliser la propriété énonçant que le chemin optique séparant deux points conjugués est indépendant du rayon lumineux choisi.
Modèle d'émission. Relation (admise) entre le temps de cohérence et la largeur spectrale.	Citer l'ordre de grandeur du temps de cohérence Δt de quelques radiations visibles. Utiliser la relation $\Delta f.\ \Delta t \sim 1$ pour relier le temps de cohérence à la largeur spectrale $\Delta\lambda$ de la radiation.
Récepteurs. Intensité de la lumière.	Relier l'intensité à la moyenne temporelle du carré de la grandeur scalaire de l'optique. Citer l'ordre de grandeur du temps de réponse de quelques récepteurs de lumière. **Mettre en œuvre des expériences utilisant un capteur photographique numérique.**

Dans la partie « **Superposition d'ondes lumineuses** », la formule de Fresnel, admise en classe de première année, est démontrée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.2. Superposition d'ondes lumineuses	
Superposition de deux ondes incohérentes entre elles.	Justifier et utiliser l'additivité des intensités.

Superposition de deux ondes monochromatiques cohérentes entre elles : formule de Fresnel. Facteur de contraste.	Citer les principales conditions pour que le phénomène d'interférences apparaisse (ondes quasi synchrones, déphasage constant dans le temps ou très lentement variable). Établir et utiliser la formule de Fresnel. Associer un bon contraste à des ondes d'intensités voisines.

Dans la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young** », les trous d'Young permettent de confronter théorie et expérience. Les fentes d'Young peuvent être abordées mais de manière exclusivement expérimentale. Aucune connaissance sur un autre diviseur du front d'onde n'est exigible.

3.3. Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young	
Trous d'Young ponctuels dans un milieu non dispersif : source ponctuelle à distance finie et observation à grande distance. Champ d'interférences. Ordre d'interférences.	Définir, exprimer et utiliser l'interfrange et l'ordre d'interférences. Justifier que les franges ne sont pas localisées.
Variations de l'ordre d'interférences avec la position du point d'observation ; franges d'interférences.	Interpréter la forme des franges observées.
Variations de l'ordre d'interférences avec la position d'un point source. Perte de contraste par élargissement angulaire de la source.	Utiliser un critère de brouillage des franges portant sur l'ordre d'interférence.
Variations de l'ordre d'interférence avec la longueur d'onde. Perte de contraste par élargissement spectral de la source.	Utiliser un critère de brouillage des franges portant sur l'ordre d'interférence.

Dans la partie « **Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue** », l'étude de l'interféromètre de Michelson en lame d'air permet de confronter théorie et expérience. L'étude de l'interféromètre de Michelson en coin d'air est abordée de manière exclusivement expérimentale. Pour la modélisation d'un interféromètre de Michelson, on suppose la séparatrice infiniment mince.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
3.4. Exemple de dispositif interférentiel par division d'amplitude : interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue	
Interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue. Localisation (admise) des franges.	Citer les conditions d'éclairage et d'observation en lame d'air et en coin d'air.

Lame d'air : franges d'égale inclinaison.	Établir et utiliser l'expression de la différence de marche en fonction de l'épaisseur de la lame d'air équivalente et de l'angle d'incidence des rayons. **Régler un interféromètre de Michelson pour une observation en lame d'air avec une source étendue à l'aide d'un protocole proposé.** **Mettre en œuvre un protocole pour accéder au profil spectral d'une raie ou d'un doublet à l'aide d'un interféromètre de Michelson.**
Coin d'air : franges d'égale épaisseur.	Utiliser l'expression admise de la différence de marche en fonction de l'épaisseur. **Caractériser la géométrie d'un objet ou l'indice d'un milieu à l'aide d'un interféromètre de Michelson.**

4. Électromagnétisme

Le programme d'électromagnétisme de la filière MPI s'inscrit dans le prolongement du thème « Ondes et signaux » du programme de MPII, option systèmes informatiques. Il s'agit pour les étudiants de découvrir les lois locales et intégrales qui gouvernent les champs électrique et magnétique et les phénomènes que ces lois permettent de modéliser, notamment dans le domaine des ondes électromagnétiques.

L'étude des champs électrostatique et magnétostatique est présentée en deux parties distinctes ; l'enseignant est libre, s'il le souhaite, de procéder à une présentation unifiée de la notion de champ statique. Pour les calculs de champs, l'accent est mis sur les situations à haut degré de symétrie qui permettent l'utilisation efficace des propriétés de flux ou de circulation. Les équations locales des champs statiques sont introduites comme cas particuliers des équations de Maxwell.

La loi de Biot et Savart, les notions de potentiel vecteur et d'angle solide ne relèvent pas du programme.
Les relations de passage relatives au champ électromagnétique peuvent être exploitées mais doivent être systématiquement rappelées.

La partie « **Électrostatique** » constitue un approfondissement des lois quantitatives qui régissent le champ électrostatique. Les notions abordées sont donc centrées sur l'essentiel : distributions de charges, champ et potentiel. Pour le champ électrostatique et le potentiel, on se limite aux expressions dans le cas de charges ponctuelles.
L'accent est mis sur les propriétés intégrales du champ et sur le théorème de Gauss pour des situations présentant un haut degré de symétrie ; ce dernier est admis.
Des capacités sur la lecture des lignes de champ et des surfaces équipotentielles sont développées.
Le condensateur plan est introduit mais l'étude des conducteurs en équilibre électrostatique ne relève pas du programme.
Une approche énergétique est conduite dans un cas simple : une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.
Le dipôle est traité, l'accent est mis sur les effets qualitatifs.
Les analogies avec la gravitation sont centrées sur l'application du théorème de Gauss.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1. Électrostatique	
Loi de Coulomb. Champ électrostatique. Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.
Distributions continues de charges : volumique, surfacique, linéique.	Choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée. Relier les densités de charges de deux types de distributions modélisant une même situation. Déterminer la charge totale d'une distribution continue dans des situations simples.
Symétries et invariances du champ électrostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges. Identifier les invariances d'une distribution de charges. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique créé.
Circulation du champ électrostatique. Potentiel électrostatique. Opérateur gradient.	Relier le champ électrostatique au potentiel. Exprimer le potentiel créé par une distribution discrète de charges. Citer l'expression de l'opérateur gradient en coordonnées cartésiennes. Déterminer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques. Déterminer une différence de potentiel par circulation du champ électrostatique dans des cas simples.
Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss.	Reconnaître les situations pour lesquelles le champ électrostatique peut être calculé à l'aide du théorème de Gauss.
Systèmes modélisés par une sphère, un cylindre infini ou un plan infini.	Établir les expressions des champs électrostatiques créés en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume, par un cylindre infini uniformément chargé en volume et par un plan infini uniformément chargé en surface. Établir et énoncer qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution. Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.

Étude du condensateur plan modélisé comme la superposition de deux distributions surfaciques, de charges opposées.	Établir et citer l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide.
Lignes de champ, tubes de champ, surfaces équipotentielles.	Orienter les lignes de champ électrostatique créées par une distribution de charges. Représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement. Associer les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.
Énergie potentielle électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur.	Établir et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique extérieur.
Notion de dipôle électrostatique, moment dipolaire.	Exprimer le moment dipolaire d'un doublet de charges. Évaluer des ordres de grandeur dans le domaine microscopique.
Champ et potentiel créés par un dipôle électrostatique.	Expliciter l'approximation dipolaire. Représenter l'allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles d'un dipôle électrostatique. Établir et exploiter les expressions du champ et du potentiel créés par un doublet de charges dans l'approximation dipolaire.
Dipôle électrostatique placé dans un champ électrostatique extérieur : actions subies et énergie potentielle d'interaction.	Expliquer qualitativement le comportement d'un dipôle placé dans un champ électrostatique extérieur. Établir et exploiter les expressions des actions mécaniques subies par un doublet de charges dans un champ électrostatique extérieur uniforme. Exploiter l'expression fournie de la force subie par un dipôle placé dans un champ électrostatique extérieur non uniforme. Citer et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'interaction.
Analogies avec la gravitation.	Utiliser le théorème de Gauss de la gravitation.

La partie « **Magnétostatique** » s'appuie sur les différents aspects qualitatifs et quantitatifs vus en première année de la classe de MPII option sciences informatiques. Les étudiants sont déjà familiarisés avec le concept de champ magnétostatique lors de l'étude des phénomènes d'induction. Il s'agit ici de préciser les propriétés de ce champ, avec l'analyse des symétries et des invariances de la distribution, ainsi qu'avec l'utilisation du théorème d'Ampère pour la détermination d'un champ magnétique.
La loi de Biot et Savart n'est pas introduite ; l'utilisation de celle-ci pour calculer un champ magnétostatique est donc exclue.
Les distributions de courants surfaciques ne sont pas introduites à ce niveau du programme, elles le sont uniquement à l'occasion de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait.

Les propriétés des dipôles magnétiques, sont précisées, notamment en ce qui concerne le champ magnétostatique créé et les actions subies lorsque le dipôle magnétique est placé dans un champ magnétostatique extérieur. On peut, sur ce thème, souligner les analogies avec l'électrostatique.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2. Magnétostatique	
Courant électrique. Vecteur densité de courant volumique. Distributions de courant électrique filiformes.	Déterminer l'intensité du courant électrique traversent une surface orientée.
Symétries et invariances du champ magnétostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courants. Identifier les invariances d'une distribution de courants. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de courants pour caractériser le champ magnétostatique créé.
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	Identifier les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Citer quelques ordres de grandeur de champs magnétostatiques.
Applications au fil rectiligne « infini » de section non nulle et au solénoïde « infini ».	Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur. Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ magnétostatique créées par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.
Notion de dipôle magnétique. Moment magnétique.	Exprimer le moment magnétique d'une boucle de courant plane. Évaluer des ordres de grandeur dans les domaines macroscopique et microscopique.
Champ créé par un dipôle magnétique.	Expliciter l'approximation dipolaire. Représenter l'allure des lignes de champ d'un dipôle magnétique. Exploiter l'expression fournie du champ créé par un dipôle magnétique.

Dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique extérieur : actions subies et énergie potentielle d'interaction.	Expliquer qualitativement le comportement d'un dipôle passif placé dans un champ magnétostatique extérieur. Exploiter les expressions fournies des actions mécaniques subies par un dipôle magnétique dans un champ magnétostatique extérieur uniforme. Exploiter l'expression fournie de la force subie par un dipôle magnétique dans un champ magnétostatique extérieur non uniforme. Citer et exploiter l'expression de l'énergie potentielle d'interaction.

Dans la partie « **Équations de Maxwell** » une vision unifiée des lois de l'électromagnétisme est présentée. Elle conduit à une première approche quantitative du phénomène de propagation et permet également de revenir sur les lois de l'induction étudiées en classe de MPII, option sciences informatiques.
Les lois locales de l'électrostatique relatives au potentiel constituent un support pertinent pour procéder à une approche numérique de la résolution d'une équation aux dérivées partielles.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
4.3. Équations de Maxwell	
Principe de la conservation de la charge : formulation locale.	Établir l'équation locale de la conservation de la charge en coordonnées cartésiennes dans le cas à une dimension.
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Associer l'équation de Maxwell-Faraday à la loi de Faraday. Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Associer qualitativement le couplage spatio-temporel entre champ électrique et champ magnétique au phénomène de propagation. Vérifier la cohérence des équations de Maxwell avec l'équation locale de la conservation de la charge.
Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants.	Établir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.
Cas des champs statiques : équations locales.	Établir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.
Équation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique.	Établir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique. Exprimer par analogie les équations de Poisson et de Laplace dans le cas de la gravitation. <u>Capacité numérique</u> **:** à l'aide d'un langage de programmation résoudre numériquement l'équation de Laplace à une ou deux dimensions, les conditions aux limites étant fixées.

Dans la partie « **Énergie du champ électromagnétique** », aucun modèle relatif à la loi d'Ohm locale n'est exigible ; l'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, sur l'utilisation du flux du vecteur de Poynting pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface et sur les bilans d'énergie et de puissance.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.4. Énergie du champ électromagnétique	
Force électromagnétique volumique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
Loi d'Ohm locale ; puissance volumique dissipée par effet Joule.	Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.
Énergie électromagnétique volumique. Vecteur de Poynting. Bilan d'énergie.	Citer des ordres de grandeur de flux énergétiques moyens (flux solaire, laser…). Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme locale et intégrale. Interpréter chaque terme de l'équation locale de Poynting, celle-ci étant fournie.

La partie « **Propagation et rayonnement** » est l'occasion d'illustrer l'efficacité du formalisme local des équations de Maxwell en insistant sur les aspects qualitatifs et sur la variété des applications qui en découlent.
Si le modèle de l'onde plane est présenté dans le cadre de l'espace vide, les études des ondes électromagnétiques dans un plasma ainsi que dans un milieu ohmique permettent d'illustrer l'importance des couplages entre les champs, les charges et les courants. Elles sont également l'occasion d'enrichir les compétences des étudiants sur les phénomènes de propagation en abordant, par exemple, l'effet de peau, le phénomène de dispersion, les notions de vitesse de groupe et de phase, de fréquence de coupure ou encore d'onde évanescente.
La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait permet d'aborder la notion d'onde stationnaire. L'importance des conditions aux limites imposées sur la quantification des solutions est soulignée. La notion de densité de courant surfacique est introduite mais le calcul de l'intensité à travers un segment ne relève pas du programme.
L'étude du rayonnement dipolaire repose sur l'analyse et l'exploitation des expressions des champs, qui sont admises.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.5. Propagation et rayonnement	
Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant ; onde plane progressive et aspects énergétiques.	Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension. Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant.

Onde plane progressive monochromatique. Relation de dispersion.	Expliquer le caractère idéal du modèle de l'onde plane monochromatique. Déterminer la relation de dispersion. Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications. Exprimer le vecteur de Poynting et l'énergie électromagnétique volumique associés à une onde plane progressive monochromatique. Effectuer une étude énergétique dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique.
Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement ou circulairement.	Reconnaître une onde polarisée rectilignement ou circulairement. **Utiliser des polariseurs et étudier quantitativement la loi de Malus.**
Onde plane transverse électrique monochromatique dans un plasma dilué. Conductivité complexe du milieu. Pulsation de coupure. Ondes évanescentes.	Exprimer la conductivité complexe du milieu et établir la relation de dispersion. Décrire le phénomène de dispersion. Relier la fréquence de coupure aux caractéristiques du plasma et citer son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère. Distinguer qualitativement les ondes évanescentes et les ondes progressives du point de vue du transport de l'énergie.
Vitesse de phase, vitesse de groupe.	Calculer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Citer une interprétation de la vitesse de groupe en s'appuyant sur l'analyse qualitative d'un exemple.
Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique en régime lentement variable. Effet de peau.	Établir et interpréter l'expression de la longueur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans un milieu ohmique.
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire.	Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire.	Établir la condition de quantification des solutions. **Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique, dans le domaine des ondes centimétriques.**
Champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant dans la zone de rayonnement. Puissance rayonnée.	Justifier l'intérêt du modèle du dipôle oscillant et citer des exemples dans différents domaines. Formuler et commenter les approximations reliant les trois échelles de longueur pertinentes. Analyser la structure du champ électromagnétique rayonné, les expressions des champs étant fournies, en utilisant des arguments généraux : symétrie, conservation de l'énergie et

	analyse dimensionnelle. Effectuer un bilan énergétique, les expressions des champs étant fournies. Représenter l'indicatrice de rayonnement. **Détecter une onde électromagnétique rayonnée.**

5. Thermodynamique : transferts thermiques

Le programme de thermodynamique de la classe de MPI est consacré à l'étude des transferts thermiques.
Dans le cas de la diffusion thermique, la mise en équation est limitée au cas des solides ; on peut utiliser les résultats ainsi établis dans d'autres situations, notamment dans des fluides, en affirmant la généralisation des équations obtenues dans les solides. Les mises en équations locales sont faites exclusivement sur des géométries où une seule variable d'espace intervient. On admet ensuite les formes générales des équations en utilisant les opérateurs d'analyse vectorielle. Enfin, aucune connaissance spécifique sur les solutions d'une équation de diffusion ne figure au programme.
La loi de Newton à l'interface entre un solide et un fluide est introduite.
Les transferts thermiques par rayonnement sont abordés sans formalisme excessif, la loi de Planck n'étant pas exigible. L'effet de serre est étudié quantitativement dans un modèle simple à une couche, dont les limites peuvent être soulignées quand il est appliqué à l'atmosphère terrestre.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Conduction, convection et rayonnement.	Reconnaître un mode de transfert thermique. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.**
Flux thermique. Vecteur densité de flux thermique.	Calculer un flux thermique à travers une surface orientée et interpréter son signe.
Premier principe de la thermodynamique.	Effectuer un bilan local d'énergie interne pour un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique.
Loi de Fourier.	Interpréter et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, verre, acier. **Mesurer la conductivité thermique d'un matériau.**

Équation de la diffusion thermique.	Établir l'équation de la diffusion thermique sans terme de source au sein d'un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique. Utiliser une généralisation de l'équation de la diffusion en présence d'un terme de source. Utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur Laplacien et son expression fournie. Analyser une équation de diffusion thermique en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.
Régime stationnaire. Résistance thermique.	Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Déterminer l'expression de la résistance thermique d'un solide dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Exploiter les lois d'association de résistances thermiques.
Coefficient de transfert thermique de surface, loi de Newton.	Utiliser la loi de Newton comme condition aux limites à une interface solide-fluide.
Approche descriptive du rayonnement thermique dans le cas d'un corps noir. Loi de Wien. Loi de Stefan. Effet de serre.	Exploiter les expressions fournies des lois de Wien et de Stefan. Analyser quantitativement l'effet de serre en s'appuyant sur un bilan énergétique sur un modèle à une couche.

6. Physique quantique

Cette partie s'inscrit dans le prolongement de l'introduction à la physique quantique traitée en classe de MPII, option sciences informatiques. Il s'agit cependant de dépasser l'approche descriptive et qualitative et de donner aux étudiants leurs premiers outils quantitatifs d'analyse. Le cœur de cet enseignement est construit sur la mécanique ondulatoire de Schrödinger et propose des résolutions d'exemples simples mais fondamentaux pour la bonne compréhension de problèmes plus complexes : particule dans une marche de potentiel et effet tunnel, particule dans un puits de potentiel infini et quantification de l'énergie d'une particule confinée. L'accent doit être mis sur l'interprétation et l'exploitation des résultats et non pas sur les calculs, non exigibles pour l'exemple plus délicat de la barrière de potentiel. Le professeur peut au contraire, s'il le souhaite, proposer des analyses de graphes, des exploitations de formules analytiques fournies, des estimations numériques, des simulations… afin d'aborder des modélisations plus réalistes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.1. Fonction d'onde et équation de Schrödinger	
Fonction d'onde ψ d'une particule sans spin et densité de probabilité de présence.	Interpréter en termes de probabilité l'amplitude d'une onde associée à une particule.
Équation de Schrödinger à une dimension dans un potentiel V(x).	Utiliser le caractère linéaire de l'équation (principe de superposition).
États stationnaires de l'équation de Schrödinger.	Procéder à la séparation des variables temps et espace. Distinguer l'onde associée à un état stationnaire en mécanique quantique d'une onde stationnaire au sens usuel de la physique des ondes. Relier l'énergie de la particule à l'évolution temporelle de sa fonction d'onde et faire le lien avec la relation de Planck-Einstein. Identifier le terme associé à l'énergie cinétique.
6.2. Particule libre	
Fonction d'onde d'une particule libre non localisée.	Établir les solutions. Interpréter la difficulté de normalisation de cette fonction d'onde.
Relation de de Broglie.	Relier l'énergie de la particule et le vecteur d'onde de l'onde plane associée.
Inégalité d'Heisenberg spatiale et paquet d'ondes.	Expliquer, en s'appuyant sur l'inégalité d'Heisenberg spatiale, que la localisation de la particule peut s'obtenir par superposition d'ondes planes.
6.3. États stationnaires d'une particule dans des potentiels constants par morceaux	
États stationnaires d'une particule dans le cas d'une marche de potentiel.	Citer des exemples physiques illustrant cette problématique. Exploiter les conditions de continuité (admises) relatives à la fonction d'onde. Établir la solution dans le cas d'une particule incidente sur une marche de potentiel. Expliquer les différences de comportement par rapport à une particule classique Identifier une onde évanescente et la caractériser.
Barrière de potentiel et effet tunnel.	Décrire qualitativement influence de la hauteur et de la largeur de la barrière de potentiel sur l'effet tunnel. Citer des applications.
États stationnaires d'une particule dans un puits de potentiel infini.	Établir les solutions et les niveaux d'énergie de la particule confinée. Identifier des analogies avec d'autres domaines de la physique.
Énergie de confinement.	Estimer l'énergie d'une particule confinée dans son état fondamental pour un puits non rectangulaire. Associer l'analyse à l'inégalité d'Heisenberg.

6.4. États non stationnaires d'une particule dans un puits de potentiel infini	
Combinaison linéaire d'états stationnaires.	Expliquer qu'une superposition de deux états stationnaires engendre une évolution au cours du temps de l'état de la particule. Établir l'expression de la densité de probabilité de présence de la particule dans le cas d'une superposition de deux états stationnaires ; interpréter le résultat.

7. Transformation de la matière

L'objectif de cette partie est d'amener les étudiants à mobiliser de manière autonome les notions et modèles pour décrire, au niveau macroscopique, un système physico-chimique et son évolution. Il convient que les problématiques abordées, les illustrations et les applications prennent largement appui sur des transformations chimiques rencontrées dans la vie quotidienne, au laboratoire, en milieu industriel ou dans le monde du vivant.

Les concepts développés permettent l'étude quantitative de l'état final d'un système, siège d'une transformation chimique, à partir d'une modélisation par une seule réaction chimique. Cette réaction est décrite de manière symbolique par une équation de réaction à laquelle est associée une constante thermodynamique d'équilibre. Il s'agit de prévoir le sens d'évolution de systèmes homogènes ou hétérogènes et de déterminer leur composition dans l'état final.

Ces études portent plus spécifiquement sur les transformations chimiques en solution aqueuse notamment sur des transformations modélisées par des réactions acide-base et d'oxydo-réduction. Ces dernières interviennent dans de nombreux développements technologiques et lors d'analyses de qualité et de conformité : générateurs électrochimiques, traitement des eaux, analyses environnementales, lutte contre la corrosion… On évite tout calcul inutile de concentration et de pH, en privilégiant l'utilisation des diagrammes de prédominance ou de distribution pour valider le choix de la réaction qui modélise au mieux la situation. Aucune formule de calcul de pH n'est exigible.

Les choix pédagogiques relatifs au contenu des séances de travail expérimental contribuent à contextualiser ces enseignements et constituent une nouvelle occasion d'aborder la thématique « Mesure et incertitudes ». Les titrages sont étudiés exclusivement en travaux pratiques dans le cadre de situations authentiques présentant un intérêt en termes d'analyses.

Notions et contenus	Capacités exigibles
7.1 Transformations chimiques d'un système	
Espèces physico-chimiques. Entités chimiques.	Recenser les espèces physico-chimiques présentes dans un système et leur quantité de matière. Attribuer à une espèce physico-chimique une formule brute et un état physique.
Modélisation d'une transformation au niveau macroscopique par une réaction : équation de réaction.	Écrire l'équation de la réaction qui modélise une transformation chimique.
État final d'un système siège d'une transformation : transformation totale ou non totale, équilibre chimique.	Distinguer une transformation totale d'une transformation aboutissant à un état d'équilibre chimique. Exprimer l'activité d'une espèce chimique pure, en phase condensée ou très diluée en

	solution aqueuse. Exprimer l'activité d'une espèce chimique pure ou dans un mélange dans le cas de solutions aqueuses très diluées.
Évolution d'un système, siège d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique : avancement, activité, quotient de réaction, constante thermodynamique d'équilibre. Critère d'évolution spontanée, état final.	Déterminer le quotient de réaction dans l'état initial et dans l'état final, à partir de données. Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système chimique. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. **Déterminer une constante thermodynamique d'équilibre.**
7.2 Acides et bases, réactions acide-base	
pH d'une solution aqueuse. Transformation modélisée par une réaction acide-base. Couples acide-base, constante d'acidité ; acides et bases fort(e)s ou faibles dans l'eau ; diagramme de prédominance et courbes de distribution. Indicateurs colorés.	Écrire l'équation d'une réaction acide-base et déterminer la valeur de la constante thermodynamique d'équilibre d'une réaction acide-base à partir des pKa des couples acide-base mis en jeu. Utiliser un diagramme de prédominance pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Interpréter et exploiter un diagramme de distribution. **Réaliser un titrage ayant pour réaction support une réaction acide-base.**
7.3 Oxydants et réducteurs, réactions d'oxydo-réduction	
Transformation modélisée par une réaction d'oxydo-réduction. Couple oxydant-réducteur. Nombre d'oxydation**.**	Identifier un transfert d'électrons et écrire une réaction d'oxydo-réduction à partir de données expérimentales ou des couples oxydant-réducteurs mis en jeu. Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple.
Pile, demi-piles, pont salin, tension à vide, réactions électrochimiques aux électrodes. Potentiel d'électrode, potentiel standard, relation de Nernst, électrode standard à hydrogène.	Justifier la séparation des réactifs dans deux demi-piles et l'utilisation d'un pont salin. Exploiter la relation de Nernst. Modéliser et schématiser le fonctionnement d'une pile à partir d'une mesure de tension à vide ou à partir des potentiels d'électrode, ou à partir d'une mesure d'intensité de courant. **Réaliser une pile et étudier son fonctionnement.**
Aspect thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction. Domaine de prédominance. Force comparée des oxydants et des réducteurs.	Prévoir qualitativement ou quantitativement le caractère thermodynamiquement favorisé ou défavorisé d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples.

Usure d'une pile. Capacité électrique d'une pile.	Déterminer la composition chimique d'une pile ayant fonctionné pendant une durée déterminée, l'intensité du courant étant fournie. Évaluer la capacité électrique d'une pile connaissant sa composition initiale.

Annexe 1 : matériel

Cette liste complète celle donnée en annexe 1 du programme de physique chimie de la classe de MPII, option sciences informatiques. À elles deux, ces listes regroupent le matériel que les étudiants doivent savoir utiliser avec l'aide d'une notice simplifiée. Une utilisation de matériel hors de ces listes lors d'épreuves d'évaluation n'est pas exclue, mais elle doit obligatoirement s'accompagner d'une aide.

1. Domaine optique
- Polariseur.
- Interféromètre de Michelson motorisé.
- Capteur photographique numérique.
- Spectromètre à fibre optique.

2. Domaine électrique
- Oscilloscope numérique avec analyseur de spectre.
- Carte d'acquisition dont l'API est publiée.
- Microcontrôleur.
- Circuits intégrés comportant des portes logiques

3. Domaine thermodynamique
- Caméra thermique

4. Domaine transformation de la matière
- Verrerie classique de chimie analytique : burettes, pipettes jaugées et graduées, fioles jaugées, erlenmeyers, béchers, etc.
- Matériel classique du laboratoire de chimie : dispositifs de chauffage ou de refroidissement (bain-marie, bain froid, etc.), dispositifs d'agitation.
- Spectrophotomètre UV-visible
- pH-mètre et électrodes de mesure
- Ampèremètre, voltmètre et électrodes de référence
- Thermomètre
- Balance de précision

Annexe 2 : outils mathématiques

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique de la classe de MPI sont d'une part ceux qui figurent dans l'annexe 2 du programme de la classe de MPII option sciences informatiques et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » n'a pas fait l'objet d'une rubrique en première année, l'expression des différents opérateurs introduits sont exigibles en coordonnées cartésiennes.

Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques et les formules d'analyse vectorielle ne sont pas exigibles ; elles doivent donc être systématiquement rappelées.

Le thème « Analyse de Fourier » prolonge l'étude de l'outil « Séries de Fourier » abordée en MPII option sciences informatiques et réutilisée en classe de MPI, on étend la décomposition d'un signal périodique comme somme de ses harmoniques à l'expression d'un signal non périodique sous forme d'une intégrale (synthèse spectrale) ; aucun résultat n'est exigible. On souligne en revanche la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.

Dans le thème « Équations aux dérivées partielles », aucune méthode générale d'étude n'est exigible : on se limite à chercher des solutions d'une forme donnée par substitution, menant ainsi soit à des équations différentielles classiques, soit à une relation de dispersion. L'accent est mis sur le rôle des conditions aux limites.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1. Analyse vectorielle	
Gradient.	Citer le lien entre le gradient et la différentielle. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes. Utiliser la formule d'analyse vectorielle : $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$.
Cas des champs proportionnels à $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ ou à $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)$.	Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur $i\mathbf{k}$.
2. Analyse de Fourier	
Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni. Utiliser un raisonnement par superposition.

Synthèse spectrale d'un signal non périodique.	Utiliser un raisonnement par superposition. Citer et utiliser la relation liant en ordre de grandeur la largeur spectrale Δf et la durée caractéristique Δt d'un signal non périodique.
3. Équations aux dérivées partielles	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert, équation de Schrödinger.	Identifier une équation aux dérivées partielles connue. Transposer une solution familière dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites.

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclue l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique et de la chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous complète les outils numériques identifiés dans le programme de physique-chimie de première année de la classe de MPII, option sciences informatiques.

Domaines numériques	Capacités exigibles
Transformée de Fourier discrète.	Calculer la transformée de Fourier discrète d'un signal à valeurs réelles en utilisant la fonction **rfft** de la bibliothèque **numpy.fft** (sa spécification étant donnée).
Équation de diffusion à une dimension.	Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable.
Équation de Laplace à une ou deux dimensions.	Choisir un pas spatial adapté à la résolution numérique d'une équation de Laplace dans un contexte physique donné. Implémenter un schéma itératif fourni pour résoudre l'équation de Laplace avec des conditions aux limites de type Dirichlet.

Annexe 3 : outils numériques

La prise en compte de capacités de codage en langage Python dans la formation des étudiants inclue l'utilisation de fonctions extraites de diverses bibliothèques. Elle vise à une meilleure appréhension des principes mis en œuvre par les différents logiciels de traitement des données dont l'utilisation est par ailleurs toujours recommandée. Elle a aussi pour objectif de mobiliser ces capacités dans un contexte concret, celui de la physique et de la chimie. Cette formation par le codage permet également de développer des capacités utiles à la physique-chimie comme le raisonnement, la logique ou la décomposition d'un problème complexe en étapes plus simples.

Le tableau ci-dessous complète les outils numériques identifiés dans le programme de physique-chimie de première année de la classe de MPII, option sciences informatiques.

Domaines numériques	Capacités exigibles
Transformée de Fourier discrète.	Calculer la transformée de Fourier discrète d'un signal à valeurs réelles en utilisant la fonction **rfft** de la bibliothèque **numpy.fft** (sa spécification étant donnée).
Équation de diffusion à une dimension.	Mettre en œuvre une méthode des différences finies explicite pour résoudre l'équation de diffusion à une dimension en régime variable.
Équation de Laplace à une ou deux dimensions.	Choisir un pas spatial adapté à la résolution numérique d'une équation de Laplace dans un contexte physique donné. Implémenter un schéma itératif fourni pour résoudre l'équation de Laplace avec des conditions aux limites de type Dirichlet.