ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2004 **FILIÈRE PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Lévitation magnétique

Le but de ce problème est d'interpréter certaines expériences de lévitation conduites récemment sur des substances dites diamagnétiques comme l'eau, le graphite, les matières plastiques... Ces expériences sont rendues possibles à température ordinaire grâce à l'obtention de champs magnétiques élevés, supérieurs en général à 10 T.

Dans tout le problème, le référentiel du laboratoire, noté (R), est supposé galiléen, $Oxyz$ en étant un repère orthonormé. C'est le référentiel unique d'étude des parties **II, III et IV**.

Formulaire

En coordonnées cylindriques (r, φ, z), les composantes d'un vecteur $\vec{A}$ sont notées (A_r, A_φ, A_z).

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right)_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}$$

Identité vectorielle : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

On note A la norme de tout vecteur $\vec{A}$

Composition des accélérations

R' étant un référentiel en rotation par rapport au référentiel R à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ constante autour d'un axe fixe passant par l'origine :

$$\vec{a}_{(R)} = \vec{a}_{(R')} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{(R')} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$$

Force exercée par un champ magnétique non uniforme $\vec{B}(x, y, z)$ sur un moment magnétique $\vec{\mu}$:

$$F_x = \vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \ , \quad F_y = \vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \ , \quad F_z = \vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$$

Données numériques :

Constante d'Avogadro	: $\mathcal{N}_A$	$= 6,02 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$
Champ de pesanteur	: g	$= 9,81$ m·s^{-2}
Charge élémentaire	: e	$= 1,60 \times 10^{-19}$ C
Masse de l'électron	: m_e	$= 0,91 \times 10^{-30}$ kg
Masse d'un nucléon	: M_N	$= 1,66 \times 10^{-27}$ kg
Permittivité du vide	: ε_0	$= 8,85 \times 10^{-12}$ F·m^{-1}
Perméabilité du vide	: μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7}$ H·m^{-1}

I. Champ magnétique et orbites électroniques

Un noyau fixe, de charge Ze, est placé en O. Un électron de charge $-e$, soumis à l'interaction électrostatique du noyau, décrit une trajectoire circulaire (C) de rayon r_0.

1.a) Écrire l'équation $E_{(R}$ du mouvement de l'électron dans (R) et donner sa pulsation ω_0 en fonction de Z, e, m_e, et r_0.

b) En assimilant la trajectoire (C) à une spire de courant, donner la relation entre le moment cinétique $\vec{L}$ de l'électron par rapport à O et le moment magnétique $\vec{\mu}$ associé à (C).

c) Application numérique. Calculer ω_0 et μ pour $r_0 = 1 \times 10^{-10}$ m et $Z = 1$.

2. On applique à ce système un champ magnétique $\vec{B}$, uniforme et constant.

a) Écrire dans (R) l'équation du mouvement de l'électron.

b) On considère un référentiel (S), lié au repère $Ox'y'z'$, en rotation par rapport à (R), à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ constante. Écrire l'équation $E_{(S)}$ du mouvement de l'électron dans ce référentiel.

c) Déterminer $\vec{\Omega}$, en fonction de e, m_e et $\vec{B}$, pour que $E_{(S)}$ ne contienne plus de terme linéaire en $\vec{B}$. Calculer la valeur correspondante de Ω pour $B = 10$ T.

d) Expliciter les termes d'ordre B^2 que contient alors $E_{(S)}$. Évaluer numériquement leur importance relative dans l'équation en utilisant les résultats numériques de **1.c)**. Ils seront par la suite négligés. Montrer que dans ces conditions il y a identité formelle des équations $E_{(S)}$ et $E_{(R)}$.

e) On considère le cas où $\vec{B} = B\vec{e}_z$ est orthogonal à (C). En admettant que la trajectoire (C) n'est pas modifiée par la présence du champ, déterminer la variation $\Delta\vec{L}$ du moment cinétique par rapport à O et due à l'introduction du champ. Quelle est la variation associée $\Delta\vec{\mu}$ du moment magnétique ?

f) Calculer numériquement $\Delta\mu_z/\mu_z$ pour $B = 10$ T et les valeurs données en **1.c)**.

3. L'établissement du champ magnétique, s'effectue en réalité sur une durée τ très longue devant la période du mouvement électronique. Soit $B_z(t)$ la valeur instantanée du champ, avec $B_z(0) = 0$ et $B_z(t) = B$ pour $t \geq \tau$. On le suppose orthogonal à (C) à tout instant.

a) Donner l'expression du flux de $\vec{B}$ à travers un cercle de rayon r et d'axe Oz, puis celle de la f.é.m induite le long de la circonférence de ce cercle. En déduire la composante orthoradiale E_φ du champ électrique induit.

b) Écrire l'équation d'évolution temporelle de L_z. En déduire que $L_z - \dfrac{e}{2}r^2B$ est une constante du mouvement.

c) Montrer que la variation ΔL_z que l'on peut en déduire est compatible avec celle obtenue en **2.e)** si l'on admet que la trajectoire n'est pas modifiée.

4. Un corps solide ou liquide contient N atomes identiques par unité de volume ; le noyau de chaque atome contient Z protons et $A - Z$ neutrons.

a) On suppose que les différentes orbites électroniques de l'atome ont des orientations telles que le moment magnétique électronique total est nul en l'absence de champ magnétique. En supposant valable pour l'ensemble du cortège électronique l'équivalence de l'application du champ magnétique et de la rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ déterminée en **2.c)**, montrer que l'atome acquiert sous l'effet d'un champ $\vec{B}$ un moment magnétique donné par :

$$\vec{\mu}^{at} = -\frac{Ze^2\left(\overline{x^2 + y^2}\right)}{4m_e}\vec{B}$$

où $\left(\overline{x^2 + y^2}\right)$ désigne une moyenne sur les différentes orbites électroniques repérées par rapport au centre de l'atome.

b) μ_R désignant la perméabilité relative d'un matériau, on pose $\mu_R = 1 + \chi$, χ étant appelé la susceptibilité magnétique. Dans le cas où $|\chi| \ll 1$,justifier que l'on puisse adopter la relation approchée $\vec{M} \simeq \chi\left(\vec{B}/\mu_0\right)$ où $\vec{B}$ est le champ magnétique externe appliqué et $\vec{M}$ le vecteur aimantation du corps.

c) Application numérique. En supposant cette hypothèse vérifiée, calculer χ pour un corps de masse volumique $\rho = 1 \times 10^3$ kg·m^{-3}, avec $Z/A = 1/2$ et $\overline{x^2 + y^2} = 1 \times 10^{-20}$ m^2.

II. Lévitation dans un champ magnétique à symétrie de révolution

1. Un champ magnétique statique $\vec{B}(\vec{r})$ possède la symétrie de révolution autour de l'axe Oz dans une région où le vecteur densité de courant est nul. On cherche à préciser analytiquement ce champ au voisinage de cet axe de symétrie, en utilisant un système de coordonnées cylindriques (r, φ, z).

a) Écrire les équations satisfaites par $\vec{B}$ au voisinage de l'axe Oz.

b) Compte tenu des propriétés de symétrie du champ $\vec{B}$, quelles en sont les composantes non nulles et de quels paramètres dépendent-elles ?

c) Soit M un point de l'axe Oz de cote z_M et $P(r, \varphi, z_M + \zeta)$ un point situé au voisinage immédiat de M. Vérifier que le développement en série de Taylor limité au deuxième ordre (inclus) en r et ζ du champ magnétique $\vec{B}(P)$:

$$B_r(P) = -a_1 \frac{r}{2} - a_2 r\zeta \qquad B_z(P) = a_0 + a_1\zeta + a_2 \frac{2\zeta^2 - r^2}{2} ,$$

satisfait aux équations du champ.

d) Exprimer les coefficients a_0, a_1 et a_2 en fonction de $B_M = B(M)$, $B'_M = \frac{\partial B}{\partial z}\Big|_{z_M}$ et $B''_M = \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\Big|_{z_M}$.

e) Montrer que l'expression de $B^2(P)$, en se limitant au deuxième ordre (inclus) en r et ζ, a pour expression

$$B^2(P) = B_M^2 + 2B_M B'_M \zeta + (B'^2_M + B_M B''_M)\zeta^2 + (B'^2_M - 2B_M B''_M)r^2/4$$

2. L'axe Oz est vertical. On place au point P un corps homogène, de volume V, de masse volumique ρ et de susceptibilité magnétique χ. Il est soumis au champ magnétique précédent et au champ de pesanteur.

a) Montrer que si $|\chi| \ll 1$, la force qu'exerce le champ magnétique sur le corps « dérive » d'une énergie potentielle U_{mag} donnée par :

$$U_{\text{mag}} = -\frac{1}{2\mu_0} V \chi B^2(P)$$

le volume du corps étant considéré comme assez petit pour prendre la valeur de $\vec{B}$ au point P comme sa valeur moyenne sur le corps.

b) Soit U_{tot} l'énergie potentielle totale du corps ; en donner l'expression à l'ordre 2 inclus en ζ et r.

c) On souhaite que M soit un point d'équilibre. Déduire de U_{tot} l'équation implicite qui permet de déterminer z_M.

d) Écrire les conditions de stabilité de cet équilibre en fonction de B_M, B'_M, B''_M et χ.

e) Dans le cas d'un corps paramagnétique ($\chi = \chi_p > 0$), montrer que l'équilibre est toujours instable.

f) Dans le cas d'un corps diamagnétique ($\chi = \chi_d < 0$), préciser les conditions de stabilité. Donner les expressions donnant les pulsations ω_ζ et ω_r des petits mouvements autour de la position d'équilibre z_M en fonction de B_M, B'_M et B''_M et g.

III. Lévitation diamagnétique au voisinage d'une spire

1. Le champ magnétique $\vec{B}$ est créé par une spire circulaire d'axe vertical Oz, O étant le centre de la spire, de rayon a. Elle est parcourue par un courant constant d'intensité I.

a) Calculer le champ magnétique en tout point M de l'axe Oz.

b) Déterminer les expressions de B_M, B'_M et de B''_M en fonction de $B_0 = B_z(O)$, z et a.

c) Montrer que la lévitation stable d'un corps diamagnétique ($\chi = \chi_d < 0$) de petite taille n'est possible que si z_M se situe dans un intervalle de cotes $[z_{\min}, z_{\max}]$ que l'on déterminera en fonction de a.

d) Montrer que $z_M = a/2$ est une position d'équilibre stable possible. Quelle est la valeur de B''_M en ce point ?

2. Application numérique. Le corps a pour masse volumique $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} et pour susceptibilité magnétique $\chi_d = -8,8 \times 10^{-6}$. Le rayon de la spire vaut $a = 1 \times 10^{-2}$ m ; le fil de la spire un diamètre d de 1×10^{-3} m et une résistivité de $10^{-8}\,\Omega{\cdot}$m.

a) Calculer la valeur du champ magnétique B_0 au centre de la spire et l'intensité I du courant nécessaire pour avoir un équilibre en $z_M = a/2$.

b) Calculer alors la puissance dissipée par effet Joule dans la spire. Commenter le résultat.

IV. Lévitation d'une sphère supraconductrice

Certains matériaux, refroidis à une température inférieure à une certaine température critique, deviennent supraconducteurs. En présence d'un champ magnétique, une caractéristique de cet état est l'expulsion totale du champ du sein de la matière, des courants surfaciques induits créant à l'intérieur du corps un champ magnétique exactement opposé au champ externe appliqué.

1) Soit une sphère supraconductrice, de centre O et de rayon R, plongée dans un champ externe constant et uniforme à l'échelle de la sphère $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

a) En utilisant les propriétés de symétrie de la situation, montrer qu'un potentiel vecteur pour le champ créé par les courants surfaciques est, en coordonnées cylindriques, de la forme $\vec{A} = A_\varphi \vec{e}_\varphi$.

b) Quel est le champ $\vec{B}_{\text{int}}$ créé à l'intérieur de la sphère par les courants surfaciques ? Calculer son flux à travers un cercle d'axe Oz, de rayon r et intérieur à la sphère. En déduire l'expression de $A_\varphi = A_\varphi^{\text{int}}$ à l'intérieur de la sphère.

c) Le potentiel vecteur d'un dipôle magnétique $\vec{\mu} = \mu \vec{e}_z$ placé en O est donné en un point Q par $\vec{A}(Q) = A_\varphi \vec{e}_\varphi = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{\vec{\mu} \wedge \overrightarrow{OQ}}{|OQ|^3}$. Expliciter A_φ.

d) Montrer que, en prenant pour le champ $\vec{B}_{\text{ext}}$ créé par les courants surfaciques à l'extérieur de la sphère un potentiel vecteur de cette forme, la condition de continuité du potentiel avec l'intérieur peut être satisfaite à la surface de la sphère si le moment magnétique $\vec{\mu}$ a pour valeur $\vec{\mu} = -\dfrac{3}{2\mu_0} V \vec{B}$, où V est le volume de la sphère.

e) En déduire que dans un champ magnétique $\vec{B}$ non uniforme, une sphère supraconductrice, de suffisamment petites dimensions, est soumise à une force dérivant d'une énergie potentielle que l'on explicitera.

2. Une petite sphère supraconductrice, de masse volumique $\rho_s = 2,5 \times 10^3$ kg.m^{-3}, est placée sur l'axe vertical d'une spire circulaire identique à celle étudiée en **III.1**.

a) En transposant les résultats de **III.2**, quel est le champ magnétique $B(0)$ au centre de la spire nécessaire pour que la sphère soit en lévitation à la cote $z_M = a/2$?

b) Quelle est alors l'intensité I dans la spire et la puissance dissipée par effet Joule ?

* *
*