

**ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
CONCOURS D'ADMISSION 2019**

**VENDREDI 19 AVRIL 2019 - 14h00 – 18h00**

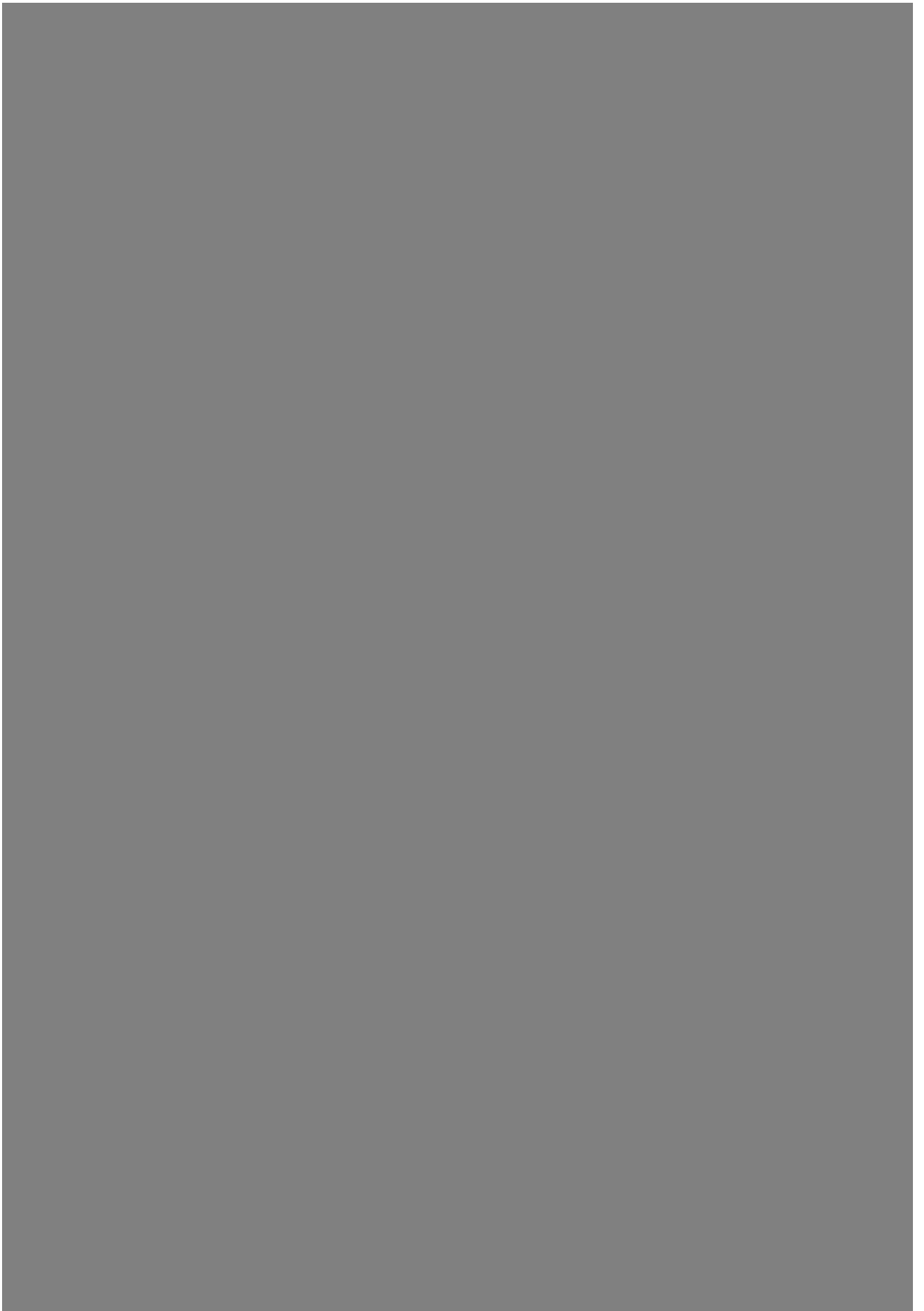
**FILIÈRE MP (Spécialité P&SI)**

**Épreuve n°4**

**PHYSIQUE ET SCIENCES  
DE L'INGÉNIEUR (X)**

**Durée : 4 heures**

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.*



Cette épreuve comprend deux parties indépendantes. La première porte sur le phénomène d'adhérence entre deux solides en contact. La seconde s'intéresse au problème du maintien en contact du pantographe d'un train avec la caténaire qui l'alimente en électricité. Il est conseillé de ne pas consacrer plus de deux heures par partie.

## Partie Physique

### Étude du phénomène de reptation thermique

Cette partie est consacrée à l'étude des propriétés d'adhérence entre deux solides. Nous analyserons d'abord le phénomène de "reptation thermique" qui est une manifestation de l'influence de la dilatation thermique sur l'état d'adhérence de deux solides en contact. Nous interpréterons ensuite, sur la base d'un modèle microscopique, les lois phénoménologiques de AMONTONS-COULOMB.

Rappelons d'abord ces lois phénoménologiques décrivant le comportement du contact entre deux solides et sur lesquelles repose cette étude. Nous considérons un solide (1) en contact avec un solide (0). Nous notons  $\vec{R}$  la force qu'exerce le solide (0) sur le solide (1) à travers la surface de contact (éventuellement locale) de vecteur normal unitaire  $\vec{n}$ , choisi orienté de (0) vers (1). Nous notons encore  $\vec{N} = N\vec{n}$  ( $N \geq 0$ ) sa composante normale et  $\vec{T} = \vec{R} - \vec{N}$  sa composante tangentielle (se reporter à la figure (1)). Le rapport  $\tan \varphi = T/N$ , ou l'angle  $\varphi$ , définit l'état d'adhérence du contact. Les lois phénoménologiques de AMONTONS-COULOMB stipulent que :

- si  $|\tan \varphi| < f$ , on n'observe pas de glissement entre les deux solides, au point de contact ;
- si  $|\tan \varphi| = f$ , il apparaît du glissement au point de contact. La vitesse de glissement  $\vec{v}$  du solide (1) par rapport au solide (0) vérifie alors  $\vec{v} \wedge \vec{T} = \vec{0}$  et  $\vec{v} \cdot \vec{T} < 0$ .

La grandeur sans dimension positive  $f$  représente le coefficient d'adhérence entre les deux surfaces. Il est indépendant de l'aire apparente de la surface de contact. On entend par aire apparente l'aire définie par les dimensions de la surface.

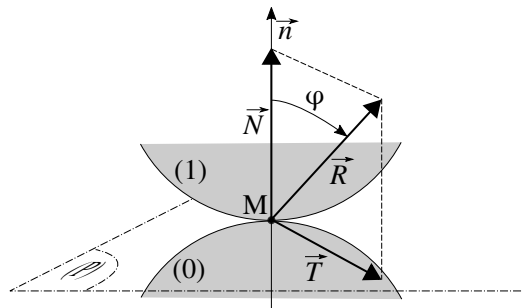


FIGURE 1 – Décomposition de la force  $\vec{R}$  qu'exerce le solide (0) sur le solide (1) au point de contact M. Le vecteur  $\vec{n}$  est normal au plan tangent (P) aux surfaces de contact (locales), en M.

### 1 Conditions d'équilibre d'un solide sur un plan incliné.

Un solide parallélépipédique de masse  $m$  (uniformément répartie dans son volume), de longueur  $2b$  et de hauteur  $2a$  (sa largeur n'interviendra pas explicitement), repose sur un plan incliné d'un angle  $\theta$  ( $\theta \in [0, +\pi/2[$ ) par rapport au plan horizontal. Nous notons  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur et posons  $q = a/b$ . La figure (2) représente ce système. Nous supposons que la zone de contact entre le solide (1) et le plan incliné (0) est localisée sur les arêtes passant par les points A et B. Nous notons  $\vec{R}_A$  et  $\vec{R}_B$  les actions de contact que le solide (0) applique sur le solide (1), au niveau des arêtes A et B. En reprenant la notation présentée en introduction nous les écrivons :

$$\begin{cases} \vec{R}_A = T_A \vec{u}_x + N_A \vec{u}_z \\ \vec{R}_B = T_B \vec{u}_x + N_B \vec{u}_z \end{cases} \quad (1)$$

1. Le solide (1) est supposé, *a priori*, à l'équilibre. Exprimer  $N_A$ ,  $N_B$  et la somme  $T_A + T_B$ . On fera apparaître le rapport  $q$ . Notons que le nombre d'inconnues excède celui des équations.

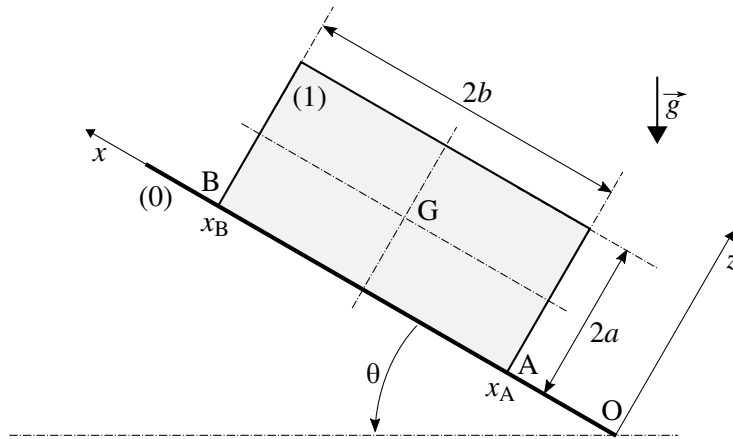


FIGURE 2 – Solide parallélépipédique reposant sur un plan incliné d'un angle  $\theta$  ( $\theta \in [0, +\pi/2[$ ) par rapport au plan horizontal. Les grandeurs  $x_A$  et  $x_B$  représentent les abscisses des arêtes A et B du solide (1).

2. Établir les conditions que doit satisfaire  $\tan \theta$  pour que l'équilibre du solide soit effectif.

■ Dans toute la suite, nous supposons que  $f < 1/q$ .

Préciser ce que traduit cette condition.

• Nous notons  $Z_A = T_A/N_A$  et  $Z_B = T_B/N_B$  l'état d'adhérence de chacun des contacts A et B.

3. Établir que les variables  $Z_A$  et  $Z_B$  vérifient l'équation :

$$AZ_A + BZ_B = C \quad \text{où} \quad C = 2 \tan \theta \quad (2)$$

On exprimera les constantes  $A = A(q, \theta)$  et  $B = B(q, \theta)$  en précisant leur signe.

4. Représenter, dans le plan  $\mathcal{P}(O, Z_A, Z_B)$ , le lieu  $\mathcal{D}$  décrit par l'équation (2). Pour ce tracé nous choisirons  $\tan \theta = 1/2$  et  $q = 1/4$ .

**N.B. :** Réaliser ce tracé avec soin et clarté et à une échelle suffisante (par exemple, 5 cm pour une unité). Il sera complété par la suite.

5. Sur le même tracé, représenter et caractériser le domaine  $\mathcal{A}$  du plan  $\mathcal{P}$  délimitant l'ensemble des états d'adhérence ( $Z_A, Z_B$ ) possibles. Préciser la portion correspondante du lieu  $\mathcal{D}$ . Pour cette illustration nous adopterons  $f = 1$ .

6. Préciser de quelle façon se traduit, sur ce graphique, l'indétermination évoquée en fin de la question (1).

7. Illustrer (toujours sur le même graphique) une situation correspondant à la limite de glissement du solide. Préciser alors la relation fixant la valeur de  $\tan \theta$ .

## 2 Reptation thermique.

Dans la situation initiale, le solide (1) est à l'équilibre sur le plan (0). Cet équilibre est supposé assez éloigné de la limite de glissement. Il est alors soumis à de lentes variations cycliques de température entre  $T_{\min} = T_0$  et  $T_{\max} = T_0 + \Delta T$  ( $\Delta T > 0$ ) comme l'illustre la figure (3). Le solide (0) est maintenu à la température  $T_0$ . Si l'amplitude  $\Delta T$  et l'angle d'inclinaison  $\theta$  vérifient conjointement une certaine condition, et après un grand nombre de cycles, on constate que le solide (1) s'est déplacé le long de la pente. C'est ce phénomène de "reptation thermique" que nous allons interpréter.

Nous supposons que dans la situation initiale, à  $T_0$ , les contacts en A et B sont dans le même état d'adhérence, c'est-à-dire que  $Z_A = Z_B$ .

■ Nous ne tiendrons pas compte de l'effet (du second ordre) des variations de température sur le rapport  $q$ .

8. Toujours en complétant le tracé réalisé en réponse à la question (4), situer le point  $S_0$  de  $\mathcal{D}$  correspondant à la situation initiale.

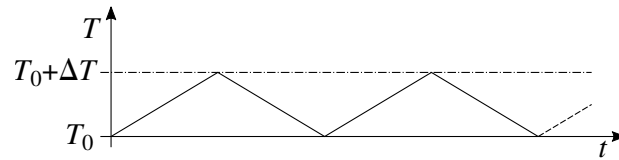


FIGURE 3 – Cycles thermiques subis par le solide (1).

9. Indiquer, en précisant le raisonnement tenu, la conséquence du chauffage du solide (1) sur le déplacement du point  $S(Z_A, Z_B)$  depuis sa situation  $S_0$ .
- 55 10. Représenter qualitativement, en correspondance des cycles thermiques représentés figure (4), l'évolution temporelle de chacune des abscisses  $x_A$  et  $x_B$  des arêtes A et B du solide (1). Nous supposons que l'amplitude thermique  $\Delta T$  est suffisante pour faire apparaître du glissement, tantôt au niveau du contact A, tantôt au niveau du contact B.

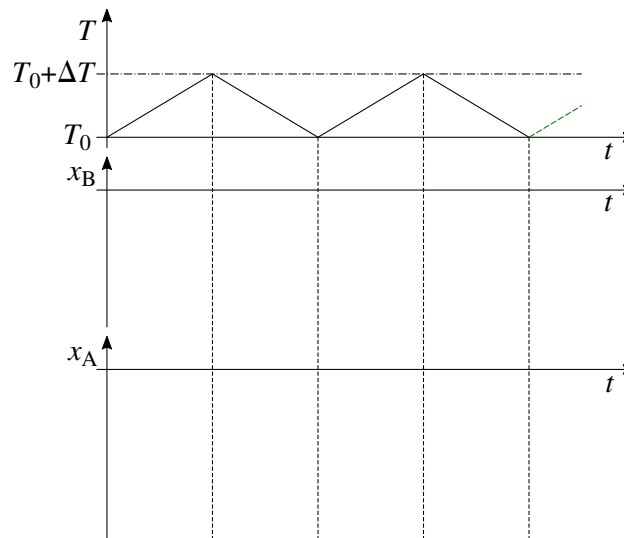


FIGURE 4 – Figure à reproduire pour illustrer l'évolution temporelle des abscisses  $x_A$  et  $x_B$  des arêtes A et B du solide (1) en réponse aux cycles thermiques  $T = T(t)$ .

- En vue de déterminer la condition que doivent satisfaire conjointement l'amplitude  $\Delta T$  et l'angle  $\theta$  pour assurer l'apparition du phénomène de reptation thermique, nous modélisons le comportement des contacts A et B comme le représente la figure (5). Chacun des contacts A et B du solide (1) avec le plan (0) s'établit par l'intermédiaire d'un patin en liaison élastique linéaire avec le solide (1). Le contact des patins (notés (1A) et (1B) sur la figure (5)) et le plan (0) respecte les relations de AMONTONS-COULOMB avec le coefficient d'adhérence  $f$  précédemment introduit. La raideur de chacun des éléments élastiques intervenant dans les liaisons (1)-(1A) et (1)-(1B) est notée  $k$ . Les variables  $u_A$  et  $u_B$  situent, relativement à la configuration neutre, la position des patins par rapport au solide (1). Le triplet  $(T, u_A, u_B)$  définit l'état mécanique et thermique des contacts. Le triplet  $(T^*, u_A^*, u_B^*)$  caractérise un état de référence.

Nous adoptons, pour décrire la dépendance d'une dimension  $L$  d'un solide parallélépipédique avec sa température  $T$ , la relation linéaire :

$$L(T) = L_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (\alpha > 0) \quad (3)$$

■ La géométrie du solide (1), désormais supposée telle que  $q \ll 1$ , permet d'adopter  $q = 0$ .

11. Relier  $u_A$  à  $Z_A$  et  $u_B$  à  $Z_B$ .

- Nous nous plaçons dans la situation telle qu'aucun des patins ne glisse lors du passage de l'état de référence  $(T^*, u_A^*, u_B^*)$  à l'état  $(T, u_A, u_B)$ , conséquence de l'évolution de la température de  $T^*$  à  $T$ .

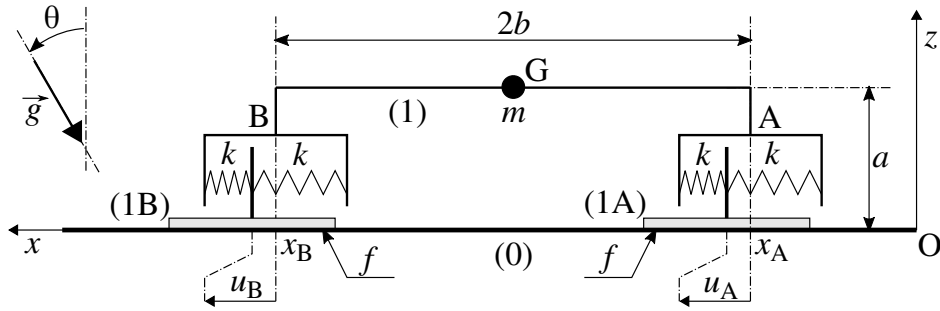


FIGURE 5 – Chacun des contacts A et B du solide (1) avec le plan (0) est modélisé par un patin, (1A) ou (1B), lié élastiquement au solide (1). Chaque patin est susceptible de glisser sur le plan (0) dans les conditions fixées par les relations de AMONTONS-COULOMB. On notera que le vecteur  $\vec{g}$  est incliné dans le repère  $(O, x, z)$ .

12. Relier la différence  $Z_A(T) - Z_B(T)$  aux écarts  $Z_A^* - Z_B^*$  et  $T - T^*$ .

Nous poserons  $\Delta Z^* = Z_A^* - Z_B^*$  et  $\beta = \frac{8kb_0}{mg \cos \theta}$  où  $b_0 = b(T_0)$ .

13. Montrer comment, graphiquement dans le plan  $\mathcal{P}$ , l'état d'adhérence  $(Z_A, Z_B)$  des contacts est défini, et paramétré par la température. On retracera tous les éléments utiles à la compréhension de la construction (et pour  $q = 0$ ). Pour cette illustration, nous choisirons l'état de référence en  $S_0$  et pour  $T^* = T_0$ .

14. Établir la condition portant conjointement sur l'amplitude  $\Delta T$  et l'angle  $\theta$  assurant l'apparition du phénomène de reptation thermique.

15. Analyser ce résultat.

16. Le dispositif expérimental<sup>1</sup> est constitué d'un plan (0) en céramique sur lequel repose une plaque de cuivre (1) de longueur  $2b_0 = 10$  cm et de coefficient de dilatation thermique  $\alpha \simeq 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . L'angle  $\theta$  est choisi proche<sup>2</sup> de l'angle limite de glissement du solide. La modulation de température est assurée par une cellule à effet PELTIER qui réalise des cycles d'amplitude  $\Delta T = 5$  K et de période  $\tau_c = 5$  min. Calculer, en heure et minute, le temps nécessaire à l'avancée de la plaque d'une distance  $\Delta x = 1$  mm.

• Le phénomène de reptation thermique peut être constaté (hors laboratoire) sur des toitures (peu pentues) recouvertes de tuiles plates ou d'ardoises simplement posées, soumises aux cycles d'ensoleillement.

### 3 Modèle microscopique du contact entre deux solides.

Nous cherchons à établir un modèle microscopique simple, compatible, à l'échelle macroscopique, avec les relations de AMONTONS-COULOMB. Imaginons que les surfaces de contact présentent la forme de dents de scie. Les dentures des surfaces étant en prise l'une sur l'autre, comme le représente la figure (6). À l'échelle locale, c'est-à-dire celle d'une dent, nous supposons que la réaction de contact reste normale aux surfaces en contact (ce qui revient à adopter un coefficient de frottement local nul). Le solide (1) est maintenu en contact avec le solide (0) par un effort normal  $\vec{N}$  constant. Il est également soumis à une force horizontale  $\vec{F} = F \vec{u}_x$  qu'un opérateur extérieur peut faire varier.

17. Proposer un encadrement (d'extension raisonnable) des valeurs du coefficient d'adhérence  $f$ , pour les situations de contact les plus courantes.

18. Reproduire le diagramme des forces de la figure (7) en respectant sensiblement les proportions ( $\|\vec{F}\| \simeq \|\vec{N}\|/3$ ). Le compléter en faisant apparaître les résultantes des réactions de contact  $\vec{R}_G$  et  $\vec{R}_D$ , de (0) sur (1), agissant respectivement sur l'ensemble des facettes (G) et l'ensemble des facettes (D).

1. En pratique, les rôles sont intervertis. Il est plus aisé de chauffer le plan qui est fixe que le solide qu'il est impératif de ne pas perturber autrement que thermiquement.

2. Mais pas trop, afin de ne pas rendre le système trop sensible aux vibrations parasites susceptibles d'amorcer le glissement de la plaque.

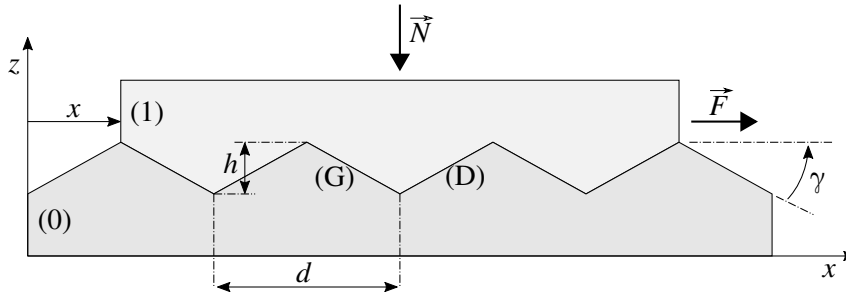


FIGURE 6 – Un modèle de contact, à l'échelle microscopique, entre deux surfaces.

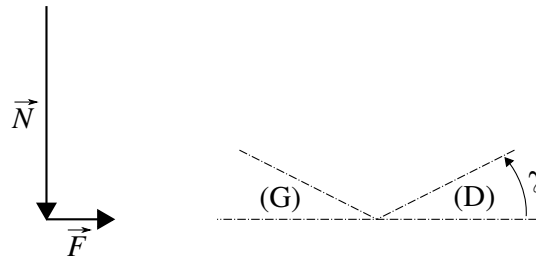


FIGURE 7 – Diagramme (à reproduire et compléter) des forces agissant sur le solide (1). L'inclinaison de la denture est indiquée par la figure en trait pointillé.

19. Dédurre de ce diagramme le coefficient d'adhérence  $f$ , apparaissant à l'échelle macroscopique, correspondant à ce modèle. On précisera le raisonnement tenu.
- 100 20. Imaginons que l'opérateur extérieur applique la force  $\vec{F} = F \vec{u}_x$  par l'intermédiaire d'une ficelle et fait croître très progressivement le module de cette force. Représenter graphiquement l'évolution de la composante  $F$ , en fonction de l'abscisse  $x$  du solide (1) par rapport au solide (0), lorsque l'opérateur fait progresser le solide (1) d'un pas à droite, et de telle manière que le travail  $W_{op}$  qu'il doit fournir soit minimal. On indiquera sur ce graphique les valeurs particulières qui apparaissent.
- 105 21. Exprimer le travail  $W_{op}$ . Analyser ce résultat.
22. Nous considérons que le solide (1) se retrouve de nouveau au repos après le passage d'un motif de denture. Indiquer pourquoi cela revient à introduire, dans ce modèle, implicitement de la dissipation. Préciser comment cette dissipation se manifeste à l'échelle macroscopique.
- Justifions, dans un cadre que nous allons définir, que l'adhérence entre deux solides ne dépend pas de la surface apparente (ou macroscopique) de contact. Nous supposons que les solides sont en contact par un ensemble de micro-surfaces. Ces micro-surfaces résultent de l'écrasement de pics (irrégularités microscopiques de rugosité) sous l'action de l'effort  $\vec{N}$ , comme l'illustre la figure (8). La surface du solide (1) en regard avec le solide (0) est supposée plane, d'aire notée  $S$ . Il s'agit de la surface apparente de contact. Celle du solide (0) est constituée d'un réseau de pics émoussés sur lesquels repose le solide (1). Nous notons  $s$  l'aire moyenne d'un îlot de contact. Enfin, nous admettons que la pointe initiale d'un pic, sous l'action de l'effort qu'elle supporte, s'é moussé jusqu'à offrir une surface telle que la force par unité de surface<sup>3</sup> qu'elle subit atteigne, en décroissant, une valeur de seuil<sup>4</sup>  $\sigma_s$  (propre au matériau).
- 110 23. Établir que la surface réelle de contact  $S'$  entre les deux solides est indépendante de la surface apparente  $S$ .
- 120 24. Nous partons du principe que l'adhérence entre deux solides est une conséquence de l'interaction à courte portée s'établissant entre les atomes des deux surfaces en contact. Argumenter ce point de vue au regard des relations phénoménologiques de AMONTONS-COULOMB.
25. Indiquer comment varie alors le coefficient d'adhérence  $f$  avec  $\sigma_s$ . Commenter brièvement ce résultat.

3. Une force par unité de surface est une pression. En mécanique des matériaux on parle plutôt de contrainte.

4. Il s'agit d'un phénomène de relaxation de contrainte.

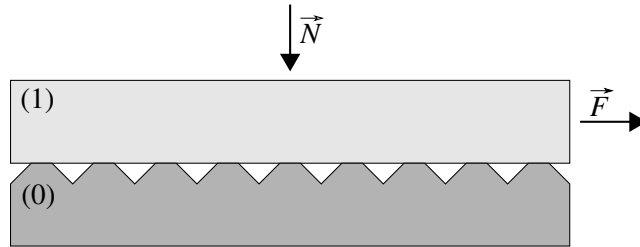


FIGURE 8 – Le contact entre les solides s'établit par l'intermédiaire de micro-surfaces (îlots de contact). Dans ce modèle, seule la surface du solide (0) présente un réseau de pics. Sous l'action de la force d'appui  $\vec{N}$ , la pointe de chacun des pics s'est émoussée pour former un îlot de contact d'aire  $s$  suffisante pour que cesse cet écrasement.

26. En conservant le principe général de dentures en prise l'une sur l'autre, proposer une évolution du modèle représenté figure (6) permettant de faire apparaître un comportement élastique (linéaire) du contact entre les solides. En introduisant les paramètres géométriques nécessaires, préciser alors l'expression de la raideur  $k$  (intervenant sur la figure (5)), puis celle du rapport  $\beta$  (défini à la question (12)), qui correspondraient à cette modélisation des contacts. Enfin, donner l'expression du coefficient d'adhérence  $f$  associé.

125



**Partie Sciences de l'ingénieur**  
**Étude de l'interaction entre le pantographe d'un train et le système caténaire**

130 Nous nous intéressons au couplage mécanique entre un système caténaire et le pantographe d'un train. Ces éléments, représentés figure (1), permettent d'assurer son alimentation électrique par contact glissant. L'exigence de qualité du contact entre le pantographe et le fil d'alimentation d'une part, le souhait de pouvoir atteindre des vitesses de circulation élevées d'autre part, nécessitent de fixer un compromis : le maintien d'un bon contact autorise une vitesse élevée, mais une vitesse élevée dégrade la qualité du contact. Les dysfonctionnements de ce dispositif sont responsables de plus d'un million de retards chaque année, en Europe. Une bonne compréhension de son fonctionnement permet de concevoir des systèmes adaptés aux différentes contraintes de fonctionnement et d'anticiper les actions de maintenance.

140 Le système caténaire est l'ensemble constitué d'un poteau, généralement en acier, supportant un système complexe de potence, appelé console, auquel est accroché le fil de contact assurant l'alimentation électrique du train. La console est un assemblage de tubes, souvent en alliage léger, possédant un degré de liberté de rotation autour d'un axe vertical permettant de compenser les variations de longueur du fil de contact. Afin de limiter le couplage dynamique entre le câble porteur et le fil de contact, ce dernier est lié à la console par un système antibalçant et un bras de rappel présentant une faible inertie. Le pantographe est un assemblage de tubes articulés fixé sur le toit de la locomotive par l'intermédiaire d'isolateurs. En se déployant élastiquement, il peut compenser les variations de hauteur du fil de contact. Il est composé d'un archet assurant le contact avec la caténaire, d'un bras articulé appelé grand cadre. Le contact entre ces deux pièces est assuré par une boîte à ressort qui permet à l'archet de pivoter pour s'adapter à la déformée du fil de contact. Le détail d'un pantographe est donné figure (2).

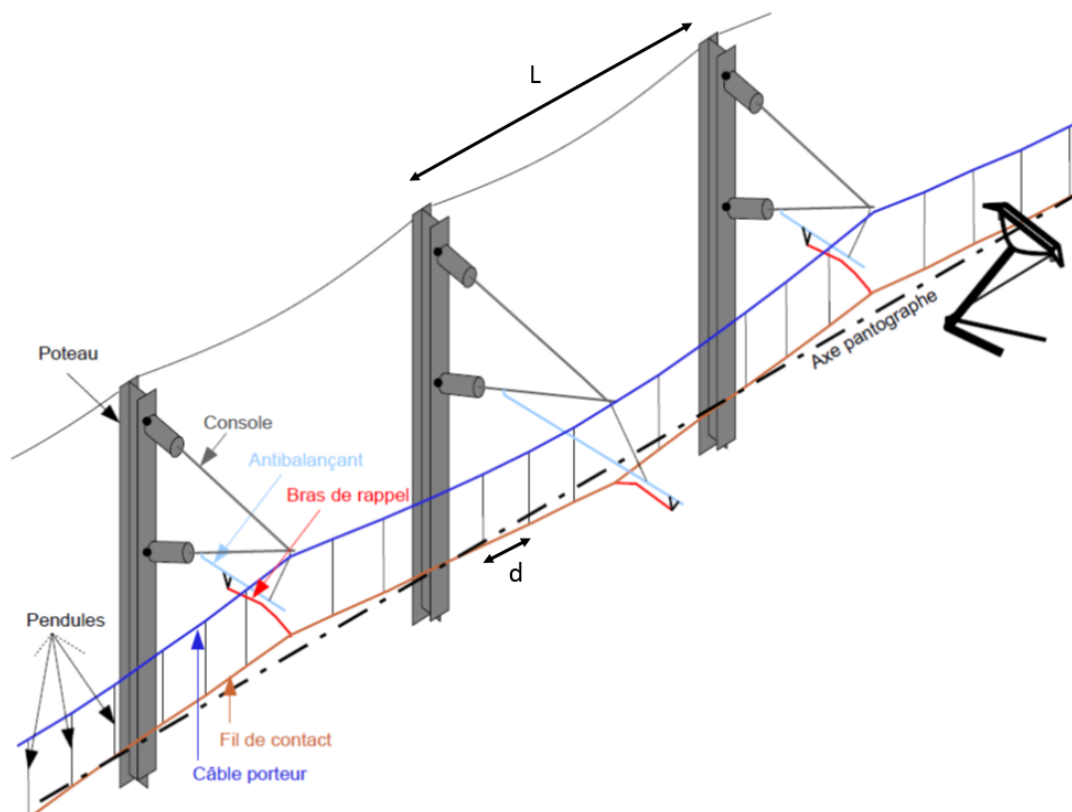


FIGURE 1 – Structure générale du système caténaire.

150 Nous déterminerons d'abord la forme adoptée par le fil porteur sous l'action du poids du fil de contact. Nous étudierons ensuite la réponse dynamique du pantographe lorsqu'il glisse le long du fil de contact. Enfin, dans le but d'identifier les risques de décollement du pantographe, nous nous intéresserons à sa réponse verticale dynamique à un défaut de positionnement du fil de contact.

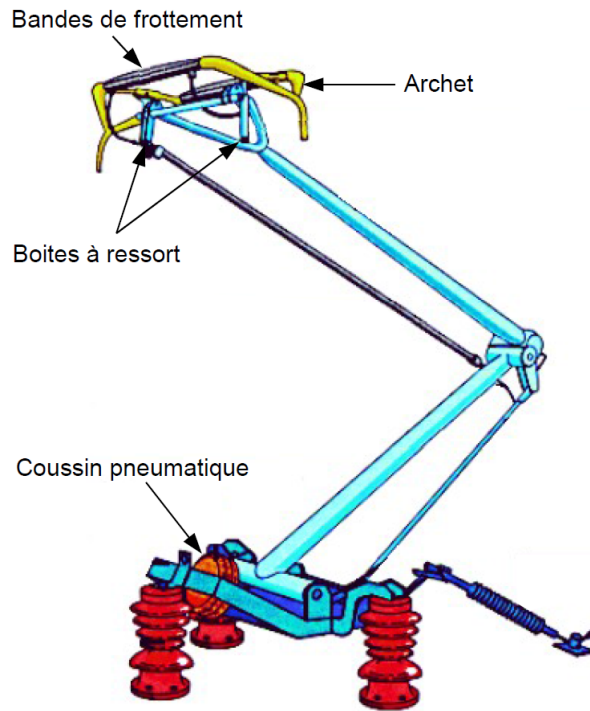


FIGURE 2 – Structure détaillée du pantographe de FAIVELEY TRANSPORT (Type Cx).

### 1 Étude de la déformée statique du câble porteur.

155 Nous considérons que le câble porteur est fixé au niveau des poteaux supportant l'ensemble caténaire. Nous notons  $L$  la distance entre deux de ses points d'ancrage. Le fil de contact est suspendu au câble porteur par  $N$  suspentes (ou pendules) espacées d'une distance  $d$  telle que  $(N + 1)d = L$ . Nous considérons que ces suspentes sont inextensibles. Ces suspentes soutiennent le fil de contact, en cuivre, que nous assimilerons à un cylindre de diamètre  $D$  (voir figure (3)). Nous considérons que ce fil n'agit sur le système caténaire que par son poids propre, sans modifier son comportement élastique. Il s'agit de déterminer la déflexion maximale du câble porteur sous l'action mécanique des suspentes. Cette connaissance permet notamment de déterminer la longueur de chaque suspen-

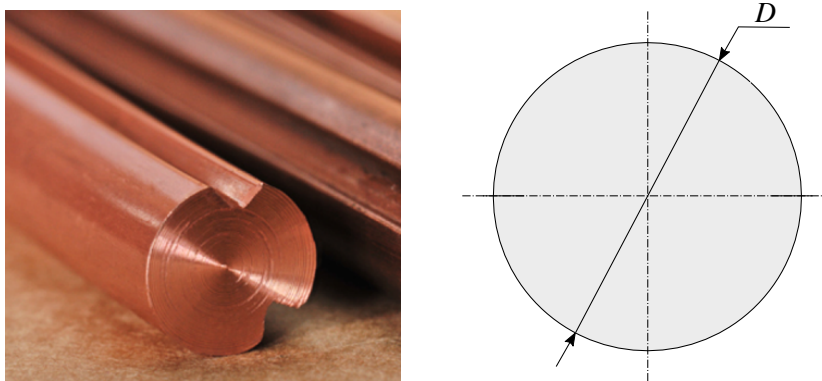


FIGURE 3 – Photographie d'un fil de contact (à gauche). Sa section est modélisée par un disque de diamètre  $D$  (à droite).

160

1. Nous supposons que le seul chargement appliqué sur le câble porteur est le poids du fil de contact transmis par les suspentes. Déterminer l'effort moyen  $F$  auquel est soumis une suspen-  
te, en fonction de la distance  $d$ , du diamètre  $D$  du fil de contact, de l'accélération de la pesanteur  $g$  et la masse volumique  $\rho$  du cuivre.  
Calculer la valeur de cette force pour  $L = 50$  m,  $N = 9$ ,  $D = 3$  cm,  $\rho = 9000$  kg · m<sup>-3</sup> et  $g = 10$  m · s<sup>-2</sup>.

165 • Nous décomposons le câble porteur en  $N + 1$  tronçons de longueur  $d$ . La figure (4) représente la déformation d'ensemble du câble ainsi que l'une de ses portions au niveau d'un point (nœud  $S_i$ ) supportant une suspente. Nous notons  $\theta_i$  et  $\theta_{i+1}$ , respectivement les angles formés entre l'horizontale et les tronçons du câble porteur, avant et après le nœud  $S_i$ . De même, nous notons  $-\vec{T}_i$  et  $\vec{T}_{i+1}$  les forces de tension transmises par le câble et auxquelles les tronçons situés de part et d'autre du nœud  $S_i$  sont soumis. Dans ce modèle le câble porteur est supposé sans masse et sans raideur de flexion (c'est-à-dire qu'il est supposé infiniment souple).

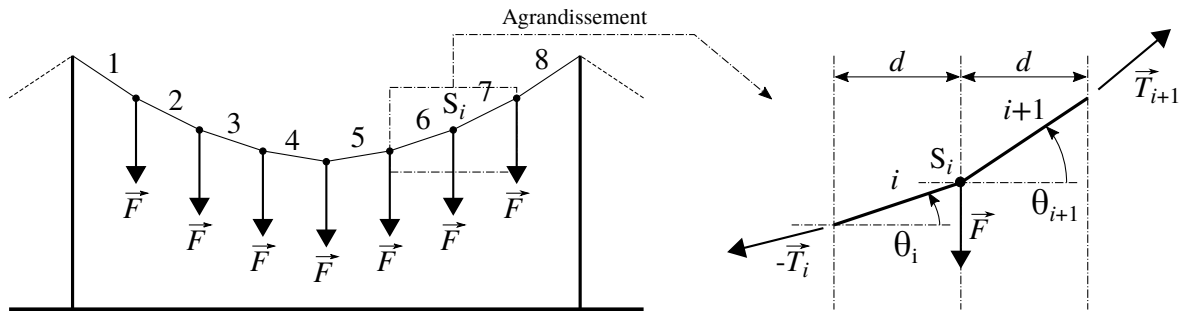


FIGURE 4 – À gauche : Déformation du câble porteur sous l'action des  $N$  forces transmises par les suspentes (ici,  $N = 7$ ). À droite : Équilibre du nœud  $S_i$  sous l'action des efforts de tension  $-\vec{T}_i$  et  $\vec{T}_{i+1}$  transmis par le câble, et de la force  $\vec{F}$  transmise par la suspente  $i$ .

170

2. Établir les deux équations algébriques traduisant l'équilibre du nœud  $S_i$ .
3. Nous nous plaçons désormais dans le cas tel que  $\forall i, |\theta_i| \ll 1$ . Exprimer l'angle  $\theta_i$  en fonction de  $\theta_1$ ,  $i$ ,  $F$  ( $F \geq 0$ ) et du rapport  $f = F/T$ . La grandeur  $T$  ( $T > 0$ ) désignant la tension à laquelle le câble est soumis.
- 175 4. Déterminer l'angle  $\theta_1$  puis exprimer  $\theta_i$  en fonction du rapport  $f$ , du nombre  $N$  de suspentes et du paramètre de situation  $i$ .
5. Exprimer la déflexion maximale  $\Delta$  ( $\Delta \geq 0$ ) du câble porteur en fonction de  $d$ ,  $f$  et  $N$ . On n'envisagera que le cas  $N$  impair.
6. Calculer la valeur de la déflexion maximale  $\Delta$  pour  $T = 10^4$  N.

## 180 2 Étude du comportement dynamique du pantographe.

Nous nous intéressons au comportement dynamique du pantographe et aux conditions de son décollement du fil de contact. Lors du déplacement d'un train à la vitesse  $\vec{V} = V \vec{e}_x$  ( $V = \text{Cste} \geq 0$ ), le pantographe doit toujours rester en contact avec le fil afin d'assurer la continuité de l'alimentation électrique. Sous son poids, entre deux suspentes<sup>1</sup>, le fil de contact présente une déformation que nous représentons simplement par une fonction sinusoïdale (composante fondamentale) :

$$\vec{u}(x) = u(x) \vec{e}_z = a \sin(Kx) \vec{e}_z \quad (a \geq 0, K = 2\pi/d) \quad (1)$$

Afin de maintenir un contact permanent avec le fil de contact, sans occasionner d'usure excessive, le pantographe doit présenter une raideur verticale faible. Nous supposons alors ce fil comme infiniment rigide comparativement au pantographe (vis-à-vis de son déploiement vertical). Le modèle masse-ressort-amortisseur adopté pour décrire le comportement dynamique du pantographe est illustré figure (5). Ce modèle correspond à une idéalisation, en ne considérant que son premier mode vibratoire. Nous notons  $k$  la raideur du ressort,  $c$  le coefficient d'amortissement et  $M$  la masse (mobile équivalente) du pantographe affectée au point A de cote  $z$ . La cote  $z_0$  ( $z_0 < 0$ ) représente la position d'équilibre du point A lorsque le pantographe n'est soumis qu'à la pesanteur. Nous posons  $h = -z_0$  et choisissons  $h > a$  afin, qu'au moins en régime statique, le contact reste assuré. L'action du fil de contact sur le pantographe au point A est modélisée par la force  $\vec{R} = R \vec{e}_z$  ( $R \geq 0$ ). Enfin, nous posons  $\omega^2 = k/M$  et  $\Omega = KV$ .

1. Le choix de la longueurs de chaque suspente permet de compenser la déformée du câble porteur, comme cela est mentionné dans l'introduction de la section (1).

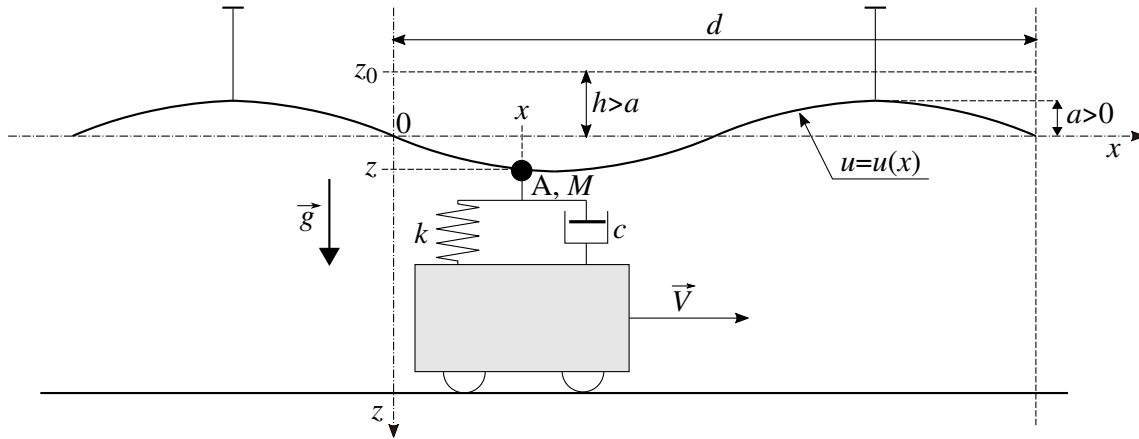


FIGURE 5 – Modèle masse-ressort-amortisseur représentant le pantographe. Ce système mécanique est soumis à l'action du fil de contact agissant au point A (affectée de la masse mobile  $M$ ). Cette action est supposée agir selon une force verticale  $\vec{R} = R\vec{e}_z$  ( $R \geq 0$ ). On notera que l'axe  $(O, z)$  est descendant.

- 190 7. Établir l'équation différentielle vérifiée par la variable de position  $z$  du point A.
- Nous négligeons le terme d'amortissement du système ( $c = 0$ ).
8. Exprimer la composante  $R$  dans la situation où le point A suit la déformée  $u = u(x)$  du fil de contact.
9. Établir la condition que doit vérifier le rapport  $Q = \Omega^2/\omega^2$  garantissant que le contact reste maintenu. On fera apparaître un rapport critique  $Q_c$ , fonction du rapport  $h/a$ . Analyser ce résultat.
- 195 ■ Par la suite, nous supposons que l'on se situe dans le régime  $Q > 1$ .
10. Dans le cas où  $Q$  ne vérifie pas la condition de contact permanent, déterminer la phase  $\Omega t_d$  correspondant à la rupture de contact du pantographe, ainsi que les position  $z_d$  et vitesse  $\dot{z}_d$  associées.
- On posera  $\alpha = \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{h}{a}$  ( $\alpha \leq 1$ ).
11. Nous posons  $\tau = t - t_d$ . Préciser l'équation horaire  $z = z(\tau)$  du mouvement du point A dans la phase qui suit le décollage et avant reprise du contact.
- 200 12. Nous supposons que  $Q \gg 1$ . Analyser le comportement du pantographe et sa conséquence sur les conditions de fonctionnement du train.
- Lorsque le coefficient d'amortissement  $c$  est pris en compte, la condition de non décollement prend la forme :

$$(1 - Q)^2 + \varepsilon Q^2 \leq \frac{h^2}{a^2} \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{c^2}{M^2 \omega^2} \quad (h > a) \quad (2)$$

13. Proposer une interprétation du paramètre  $\varepsilon$  (ou de  $1/\sqrt{\varepsilon}$ ).
14. À partir d'une interprétation graphique de cette condition indiquer si l'amortissement est un facteur favorisant le décollage ou au contraire le défavorisant.
- 205

### 3 Étude de la réponse dynamique verticale du pantographe.

Nous adoptons dans cette partie une modélisation plus fidèle du premier mode propre du pantographe. Par ailleurs, nous tenons compte du comportement dynamique du fil de contact. Nous analyserons la réponse verticale du pantographe dans deux situations particulières. L'une concerne la phase de mise en contact initiale du pantographe avec le fil de contact, à partir de sa position de repos. L'autre se rapporte à sa réponse à un défaut géométrique du fil de contact, lorsque le train circule. Le modèle mécanique du pantographe et de l'ensemble caténaire adopté est représenté figure (6). On notera que l'orientation de l'axe  $(Oz)$  est maintenant choisie opposée à celle adoptée dans la partie précédente (figure (5)).

210

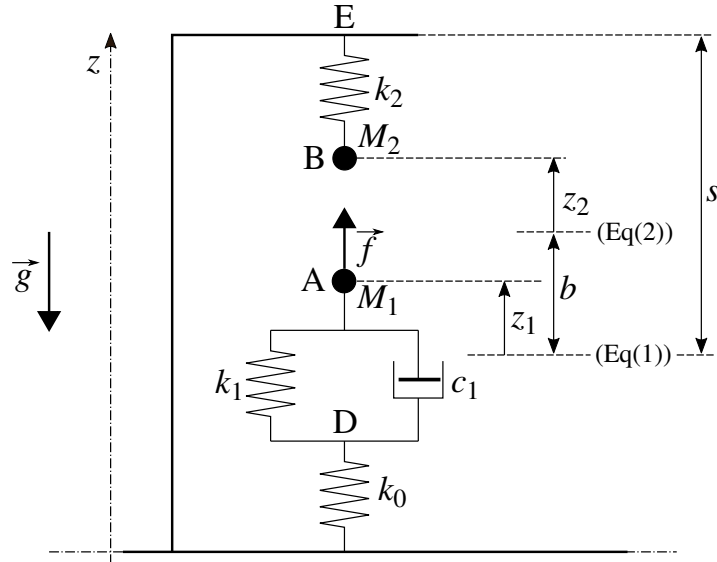


FIGURE 6 – Modèle mécanique du pantographe et de l'ensemble caténaire (phase de mise en contact). Les positions des points A et B sont comptées depuis leur situation d'équilibre respective, sous la seule action de  $\vec{g}$ . Naturellement, avant l'entrée en contact de ces deux points, et en situation d'équilibre,  $z_2 = 0$ .

Le point A, affecté de la masse  $M_1$ , représente la partie supérieure du pantographe devant rester en contact avec le fil pendant la circulation du train. Cette partie est reliée à la locomotive par un système modélisé par un ressort de raideur  $k_1$  en parallèle avec un amortisseur de coefficient d'amortissement  $c_1$ , ce groupement étant associé en série avec un second ressort de raideur  $k_0$ . L'ensemble caténaire est modélisé par une masse  $M_2$ , localisée au point B, reliée à son support par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $k_2$  modélisant son comportement élastique. Les cotes  $z_1$  et  $z_2$  désignent les variables de position des points A et B, comptées depuis leur situation d'équilibre sous la seule action de la pesanteur. Le paramètre (constant)  $b$  représente la distance entre la position de référence du point A et celle du point B. Le paramètre (constant)  $s$  situe le point E par rapport à la position de référence du point A.

Pour mettre en contact le pantographe et le fil, c'est-à-dire les points A et B. Un vérin applique une force  $\vec{f} = f(t)\vec{e}_z$ , sur le point A. Cet effort permet la montée du pantographe afin d'établir son contact avec le fil de contact. Ce dispositif permet, en cas de problème, d'interrompre rapidement l'alimentation électrique du train. Cet effort est ensuite maintenu pendant le trajet du train.

Nous notons  $F(p)$  l'image, dans le domaine de LAPLACE, d'une fonction  $f(t)$ .

### 3.1 Étude de la phase de mise en contact du pantographe avec le fil de contact.

Nous nous intéressons à la montée du pantographe, jusqu'à sa mise en contact avec le fil de contact, sous l'action de la force  $\vec{f}$  (voir figure (6)).

15. Établir la fonction de transfert  $H$  caractérisant la réponse de la variable  $z_1$  à la force  $f$ , dans la phase d'approche A  $\rightarrow$  B (avant le contact). Elle est définie par le rapport :

$$H(p) = \frac{Z_1(p)}{F(p)} \quad (3)$$

On notera que le pantographe ( $k_0, k_1, c_1, M_1$ ) est un système mécanique possédant deux degrés de liberté.

- Nous supposons que la force  $f(t)$  évolue selon un échelon tel que :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) = f_0 & \text{pour } t \geq 0 \quad (f_0 > 0) \end{cases} \quad (4)$$

16. Exprimer la réponse  $z_1(t)$  dans le cas où l'on peut négliger tous les termes de la fonction de transfert faisant intervenir la masse  $M_1$ , devant ses autres termes (on remplacera simplement  $M_1$  par 0). Nous poserons  $K = \frac{k_0 k_1}{k_0 + k_1}$ ,  $\tau = \frac{c_1}{k_0 + k_1}$  et  $\tau_1 = \frac{c_1}{k_1}$ .
17. Préciser, qualitativement, comment serait modifiée cette réponse si la masse  $M_1$  avait été prise en compte.
18. Nous posons  $\beta = Kb/f_0$  et notons  $t_c$  le temps pour lequel le contact entre A et B s'établit (pour  $\beta < 1$ ). Exprimer le rapport  $t_c/\tau$  en fonction de  $\beta$ .
19. Le contact des points A et B étant établi, déterminer leur position d'équilibre commune  $z'_{1eq}$  que l'on exprimera en fonction de  $f_0$ ,  $K$ ,  $k_2$  et  $b$ .

### 3.2 Étude de l'influence d'un défaut de positionnement vertical du fil de contact.

Durant la vie de l'installation, des évènements imprévisibles peuvent modifier l'altitude du fil de contact (rupture de suspente, fluage des terrains de fondation des poteaux caténaires, ...). Il convient donc d'étudier les risques de décollement que ces modulations d'altitude, dont l'amplitude et la fréquence spatiale peuvent varier dans une large gamme, sont susceptibles d'occasionner. En phase de déplacement du train, le comportement dynamique vertical conjugué du pantographe et du fil de contact est modélisé selon le schéma de la figure (7). Il s'agit de la situation étudiée dans la partie (3.1), après mise en contact des points A et B.

Nous notons  $\vec{f}_{1/2} = f_{1/2} \vec{e}_z$  ( $f_{1/2} \geq 0$ ) la force de contact appliquée par la masse  $M_1$ , localisée au point A, sur la masse  $M_2$ , localisée au point B. Dans la situation d'équilibre (étudiée en fin de partie (3.1)), et sans défaut de positionnement, on a  $f_{1/2} = f_{1/2}^0 = \frac{k_2}{K + k_2}(f_0 - Kb) > 0$ .

Le défaut de positionnement vertical est modélisé par un déplacement imposé du point E autour de sa position sans défaut  $s$  (position de référence horizontale moyenne) du fil de contact. Nous notons alors  $z(x) = s + \tilde{z}(x)$ . En raison du parcours à vitesse constante  $V$  du train, cela correspond à une excitation temporelle  $\tilde{z}(Vt)$  appliquée au point E. En réponse à cette excitation nous notons  $f_{1/2} = f_{1/2}^0 + \tilde{f}_{1/2}$  où  $\tilde{f}_{1/2}$  est la composante dynamique de  $f_{1/2}$  autour de sa valeur moyenne  $f_{1/2}^0$ .

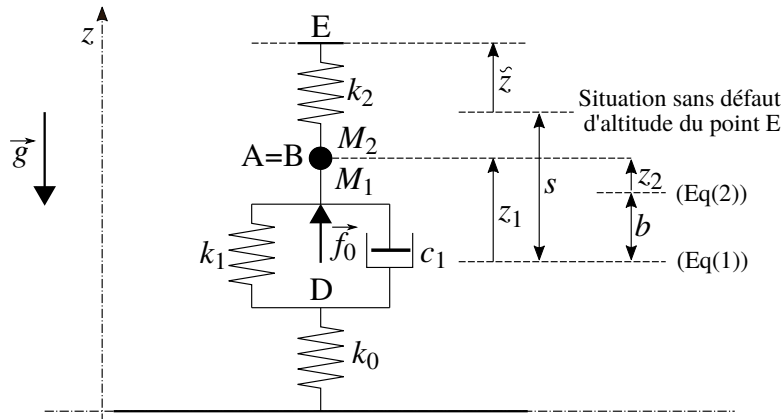


FIGURE 7 – Modèle mécanique de l'ensemble pantographe-fil de contact pendant la circulation du train. Le défaut d'altitude du fil de contact est représenté par la variable  $\tilde{z}$ , relativement à la situation idéale (situation horizontale moyenne, sans défaut du point E). La situation d'équilibre de référence reste celle se rapportant à la figure (6) et les paramètres qui interviennent sont définis dans le texte se rapportant à cette figure.

La fonction de transfert traduisant la réponse dynamique de la force de contact  $\tilde{f}_{1/2}$  à l'excitation  $\tilde{z}$  prend la forme :

$$G(p) = \frac{\tilde{F}_{1/2}(p)}{\tilde{Z}(p)} = -G_0 \frac{\tau_{3N}^3 p^3 + \tau_{2N}^2 p^2 + \tau_{1N} p + 1}{\tau_{3D}^3 p^3 + \tau_{2D}^2 p^2 + \tau_{1D} p + 1} \quad (5)$$

Tous les paramètres qui interviennent dans cette fonction sont des grandeurs réelles positives.

20. En raisonnant physiquement sur le modèle de la figure (7) exprimer  $G_0$ .
21. Préciser de quelle manière la fonction de transfert  $G$  peut nous renseigner sur le risque de perte de contact entre le pantographe et le fil de contact (c'est-à-dire entre les points A et B).
- Le tracé du rapport  $|G(i\omega)/G(0)|$  est représenté figure (8).

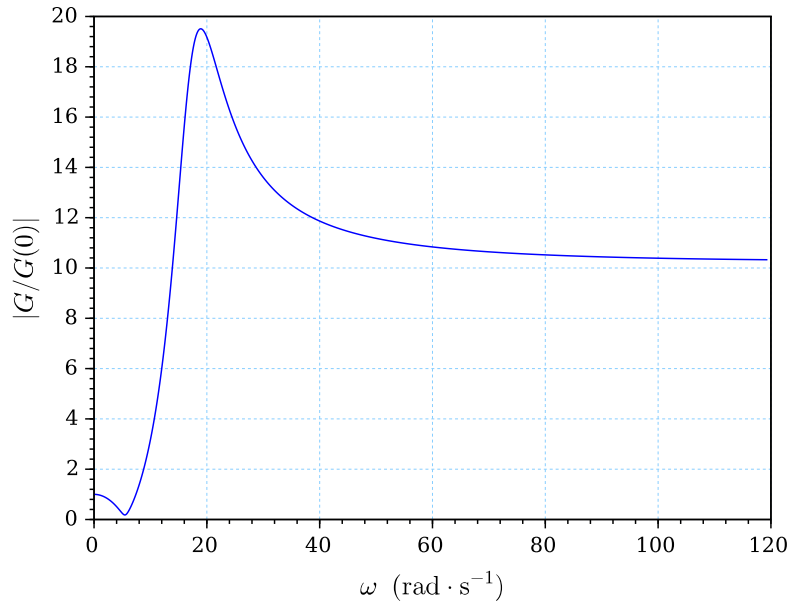


FIGURE 8 – Rapport  $|G/G(0)|$  en fonction de  $\omega$ .

- 260 22. Analyser, à partir du tracé de la figure (8), le comportement mécanique de ce système. Indiquer ce que ce tracé permet d'inférer des différents temps caractéristiques intervenant dans l'équation (5).
- 265 23. Établir le lien entre la vitesse  $V$  du train et la longueur d'onde  $\lambda$  du défaut de hauteur qui permet d'identifier un risque potentiel de perte de contact.  
 Pour un train roulant à  $V = 360 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  préciser la valeur de la longueur d'onde susceptible de provoquer une perte de contact.

\* \*  
\*