

COMPOSITION DE PHYSIQUE (XULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.  
On se contentera, pour les applications numériques, d'un seul chiffre significatif.

\*\*\*

**Imagerie par résonance magnétique**

L'imagerie par résonance magnétique (ou IRM) est une technique utilisée par les radiologues pour visualiser les tissus mous du corps humain. Elle permet en particulier de localiser précisément les cancers. Cette technique utilise un champ magnétique intense pour orienter les moments magnétiques des protons des molécules d'eau, et un champ magnétique oscillant pour en perturber l'orientation.

Ce problème expose le principe physique de l'IRM, et certains aspects de sa mise en œuvre pratique.

**Données numériques**

Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 1,3 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Conductivité du cuivre :	$\sigma = 6,0 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
Masse de l'électron :	$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Moment magnétique du proton :	$\mu = 1,4 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$
Constante de Boltzmann :	$k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Planck réduite :	$\hbar = 1,1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Charge élémentaire :	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse du proton :	$m_p = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Vitesse de la lumière dans le vide :	$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

**Formulaire**

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B}$$

## I. Production de champs magnétiques intenses et homogènes

On utilise un solénoïde d'axe  $Oz$ , parcouru par un courant continu, pour produire un champ magnétique. On choisit un système de coordonnées cylindro-polaires d'axe  $Oz$ , dont on note  $(r, \theta, z)$  les coordonnées et  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  le repère orthonormé direct.

**I.1** On suppose que tout plan contenant l'axe  $Oz$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Quelles conditions la densité de courant  $\vec{j}(j_r, j_\theta, j_z)$  doit-elle vérifier pour cela ?

**I.2** Quelles conditions en résultent pour le champ magnétique  $\vec{B}(B_r, B_\theta, B_z)$  ?

**I.3** On suppose que  $j_\theta$  est uniforme à l'intérieur d'un cylindre de révolution creux de rayon extérieur  $R_2$ , de rayon intérieur  $R_1 < R_2$ , et de longueur  $L$  très grande devant  $R_2$ . Quelle est la particularité du champ magnétique créé par un tel solénoïde ? Donner l'expression de sa valeur  $B_0$  au centre.

**I.4** La conductivité ohmique du matériau, notée  $\sigma$ , est supposée uniforme. Donner l'expression de la puissance dissipée dans le solénoïde par effet Joule.

**I.5**  $B_0$ ,  $L$  et  $R_2$  étant fixés, comment faut-il choisir  $R_1$  pour minimiser la puissance dissipée ?

**I.6** On considère un solénoïde de cuivre de longueur  $L = 1$  m délivrant un champ  $B_0 = 1,3$  T. Calculer une borne inférieure de la puissance dissipée. Comparer à la puissance d'un radiateur électrique ordinaire.

**I.7**  $B_0$  étant fixé, comment choisir  $R_2$  pour minimiser l'élévation de température du solénoïde due à l'effet Joule ? Commenter.

**I.8** On réalise la bobine en enroulant un fil électrique autour d'un cylindre de rayon  $R_1$ . Expliquer pourquoi la propriété de symétrie de la question **I.1** ne peut pas être exacte. Comment réaliser le bobinage en pratique pour qu'elle soit une bonne approximation ?

**I.9** Tracer, sans calcul, l'allure de la variation du champ magnétique sur l'axe  $Oz$  lorsque  $R_2$  et  $L$  sont du même ordre de grandeur. Comment faudrait-il modifier le bobinage pour que le champ sur l'axe soit uniforme au voisinage du centre ? On se contentera d'une réponse qualitative et d'un croquis.

**I.10** On parvient à réaliser une bobine telle que le champ sur l'axe soit quasiment uniforme dans un intervalle autour du centre de la bobine. Montrer que le champ est alors également uniforme au voisinage de l'axe.

## II. Utilisation de supraconducteurs

Pour s'affranchir de l'effet Joule, on utilise pour les bobinages des matériaux *supraconducteurs*, qui ont la propriété de pouvoir transporter un courant sans dissipation au-dessous d'une température critique  $T_c$ .

**II.1** On adopte un modèle microscopique de supraconducteur dans lequel les électrons de conduction (de charge  $-e$  et de masse  $m_e$ ), initialement au repos, sont mis en mouvement sous l'action d'un champ électrique  $\vec{E}$ , supposé uniforme et constant. Ecrire l'équation du mouvement d'un électron.

**II.2** On note  $n$  la densité volumique d'électrons, supposée uniforme. Dédurre de la question précédente une relation simple entre  $\partial\vec{j}/\partial t$  et  $\vec{E}$ .

**II.3** On suppose que la relation obtenue à la question **II.2** reste valable même si le champ n'est ni uniforme ni constant, et on se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. En utilisant les équations de Maxwell, montrer que le champ magnétique vérifie l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \text{rot}(\text{rot} \vec{B}) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \right) = \vec{0}, \quad (1)$$

où  $\lambda$  est une longueur dont on donnera l'expression.

**II.4** Calculer  $\lambda$  pour une densité d'électrons de conduction  $n = 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

**II.5** Lorsqu'on plonge un supraconducteur dans un champ magnétique extérieur, il expulse ce champ. Cette propriété, qui porte le nom d'effet Meissner, est représentée sur la figure 1.

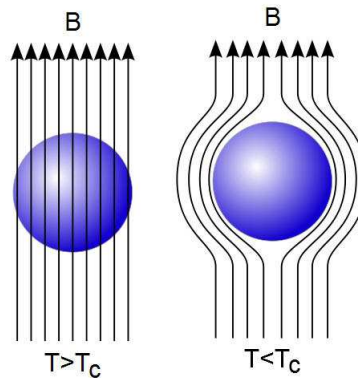


Figure 1. Effet Meissner dans une boule supraconductrice placée dans un champ magnétique lorsqu'elle est refroidie sous la température critique  $T_c$ . Les lignes sont les lignes de champ.

Pour expliquer l'effet Meissner, on postule une relation plus forte que l'équation (1) :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0}. \quad (2)$$

On considère un supraconducteur occupant le demi-espace  $x > 0$  dans un système de coordonnées cartésiennes de repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . On suppose que le champ à l'extérieur du supraconducteur ( $x < 0$ ) est uniforme et vaut  $B_0 \vec{e}_z$ , et on admet que  $\vec{B}$  ne dépend que de  $x$ . Calculer le champ magnétique pour  $x > 0$  en fonction de  $B_0$ ,  $x$  et  $\lambda$ . En quoi ce modèle explique-t-il l'effet Meissner ?

**II.6** Déterminer la densité de courant  $\vec{j}(x)$  à l'intérieur du supraconducteur.

### III. Moments magnétiques et aimantation

**III.1** Un proton de vitesse nulle possède un moment magnétique intrinsèque  $\vec{\mu}$ , dont la norme  $\mu$  est constante, mais la direction peut varier. L'imagerie par résonance magnétique utilise l'interaction des protons des atomes d'hydrogène de l'eau avec un champ magnétique. Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction, notée  $U$ , d'un proton (assimilé à un dipôle magnétique) avec un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ .

*Application numérique* : on donne  $B_0 = 1,5$  T. Calculer les valeurs maximale et minimale de  $U$ .

**III.2** Un échantillon étudié par IRM contient un grand nombre de protons dont les moments magnétiques pointent dans des directions différentes et aléatoires. On admet qu'à l'équilibre thermodynamique, la probabilité pour que la direction d'un moment donné  $\vec{\mu}$  soit dans l'angle solide élémentaire  $d^2\Omega$  autour d'une direction donnée vaut

$$dp = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) d^2\Omega, \quad (3)$$

où  $T$  est la température absolue et  $Z = \iint \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) d^2\Omega$ , l'intégrale portant sur toutes les directions spatiales. Comment s'appelle cette loi ? Dans quel contexte l'avez-vous rencontrée ? Quelle est la direction de  $\vec{\mu}$  la plus probable ?

**III.3** Exprimer l'énergie potentielle  $U$  et l'angle solide élémentaire  $d^2\Omega$  dans un système de coordonnées sphériques d'axe polaire  $Oz$ .

**III.4** On suppose dorénavant que  $|U|$  est très petit devant  $k_B T$ . Est-ce une bonne approximation à température ambiante avec le champ magnétique de la question **III.1** ?

**III.5** On appelle *aimantation* d'un échantillon contenant  $N$  protons la somme de leurs moments magnétiques, notée  $\vec{M}$ . Expliquer pourquoi, lorsque  $N \gg 1$ , l'aimantation vaut approximativement  $\vec{M} \simeq N \langle \vec{\mu} \rangle$ , où  $\langle \vec{\mu} \rangle$  désigne la valeur moyenne de  $\vec{\mu}$  avec la loi de probabilité (3).

**III.6** Développer la loi de probabilité (3) à l'ordre 1 en  $U/(k_B T)$ . Calculer la valeur moyenne de  $\vec{\mu}$  dans cette approximation, et en déduire que l'aimantation vérifie la loi de Curie :

$$\vec{M} = \frac{C}{T} \vec{B}_0, \quad (4)$$

où  $C$  est une constante qu'on exprimera en fonction de  $N$ ,  $\mu$  et  $k_B$ .

**III.7** Rappeler l'expression du couple exercé par le champ magnétique  $\vec{B}_0$  sur le dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{\mu}$ .

**III.8** Un proton de vitesse nulle est animé d'un mouvement de rotation propre. Ce mouvement lui confère un moment cinétique intrinsèque, nommé *spin* et noté  $\vec{S}$ , de norme constante  $S = \hbar/2$ , où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. On admet que les vecteurs  $\vec{S}$  et  $\vec{\mu}$  sont proportionnels :  $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ , avec  $\gamma = \mu/S$ . Montrer que  $\vec{\mu}$  est animé d'un mouvement de précession de vitesse angulaire  $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{e}_z$ , et donner l'expression de  $\omega_0$ , dite pulsation de Larmor, en fonction de  $B_0$  et  $\gamma$ . Calculer  $\omega_0$  pour  $B_0 = 1,5$  T.

**III.9** Soit un proton de vitesse initiale  $\vec{v}_0$  perpendiculaire à  $\vec{B}_0$ . Rappeler l'expression de la vitesse angulaire de sa trajectoire dans le champ  $\vec{B}_0$  (pulsation cyclotron), et comparer sa valeur à celle de la pulsation de Larmor.

#### IV. Résonance magnétique

L'imagerie par résonance magnétique utilise d'une part un champ uniforme et constant  $\vec{B}_0$ , qu'on supposera dirigé suivant l'axe  $Oz$ , et d'autre part un champ dépendant du temps  $\vec{B}_1(t)$ , avec  $|\vec{B}_1| \ll |\vec{B}_0|$ .

**IV.1** On place dans le champ un échantillon contenant  $N$  protons, avec  $N \gg 1$ . On assimile chacun de ces protons à un dipôle magnétique soumis au couple exercé par le champ magnétique total  $\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)$ . Ecrire l'équation du mouvement de l'aimantation  $\vec{M}(t)$  sous la forme

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1(t)) \wedge \vec{M} \quad (5)$$

et définir le vecteur rotation  $\vec{\omega}_1(t)$  en fonction de  $\vec{B}_1(t)$ .

**IV.2** Le champ auxiliaire  $\vec{B}_1(t)$  est un champ tournant autour de  $\vec{B}_0$  et perpendiculaire à celui-ci. Dans un référentiel galiléen de repère cartésien  $R = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , ses coordonnées sont  $(B_1 \cos(\omega t), B_1 \sin(\omega t), 0)$ . On définit le repère  $R' = (O, \vec{u}_X(t), \vec{u}_Y(t), \vec{u}_Z(t))$  tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe  $Oz$  et coïncidant avec  $R$  à  $t = 0$ , de telle sorte que  $\vec{B}_1(t) = B_1 \vec{u}_X(t)$ . Ecrire l'équation du mouvement de  $\vec{M}$  dans  $R'$ .

**IV.3** On suppose dans toute cette partie que l'aimantation à  $t = 0$  est la valeur d'équilibre déterminée à la question **III.6**,  $\vec{M}_0 = C\vec{B}_0/T$ . Expliquer pourquoi les composantes de l'aimantation perpendiculaires à  $Oz$  sont petites pour tout  $t > 0$ , sauf si  $\omega$  est très proche de  $\omega_0$ .

**IV.4** On se place à la résonance, définie par  $\omega = \omega_0$ . Décrire au moyen d'un schéma l'évolution de l'aimantation dans  $R'$  puis dans  $R$ .

**IV.5** En prenant pour  $\omega_0$  la valeur obtenue à la question **III.8**, à quel domaine de fréquences appartient le champ  $\vec{B}_1(t)$  ?

**IV.6** On donne  $B_1 = 3 \times 10^{-5}$  T. Calculer la norme du vecteur de Poynting d'une onde électromagnétique plane de champ magnétique  $\vec{B}_1(t)$  se propageant dans le vide.

**IV.7** On se place toujours à la résonance, et on applique le champ  $\vec{B}_1(t)$  uniquement entre les instants  $t = 0$  et  $t = \tau$ , où  $\tau$  est choisi de telle sorte que l'aimantation tourne d'un angle  $\pi/2$  dans  $R'$  entre les instants  $t = 0$  et  $t = \tau$ . Donner l'expression de  $\tau$  et calculer sa valeur. Montrer que l'aimantation est un vecteur constant pour  $t > \tau$  dans  $R'$ . Quelle est sa direction ?

**IV.8** En pratique, le champ  $\vec{B}_0$  n'est pas parfaitement homogène sur tout l'échantillon, et l'écart à la résonance  $\delta\omega = \omega - \omega_0$  fluctue autour de 0 d'un bout à l'autre de l'échantillon. On suppose en tout point  $|\delta\omega| \ll \omega_1$ . Décrire qualitativement comment évolue l'aimantation de l'échantillon pour  $t \gg \tau$  dans  $R'$ .

**IV.9** Pour pallier l'effet de ces inhomogénéités, on applique le champ  $\vec{B}_1(t)$  une deuxième fois entre les instants  $t = T_E$  et  $t = T_E + 2\tau$ , avec  $T_E \gg \tau$ , et on mesure l'aimantation à l'instant  $t = 2T_E$ . Déterminer l'orientation de l'aimantation à  $t = 2T_E$  dans  $R'$  pour  $\delta\omega = 0$ , puis pour  $\delta\omega \neq 0$ . Conclure. Cette technique porte le nom d'*écho de spin*.

**IV.10** L'étude ci-dessus ne prend en compte que l'interaction des protons avec le champ magnétique extérieur. Dans cette modélisation, nous avons montré à la question **IV.7** qu'à la résonance, l'aimantation dans  $R'$  est constante après l'arrêt du champ  $\vec{B}_1(t)$ . En réalité, elle n'est pas constante indéfiniment mais finit par retourner à sa valeur d'équilibre, déterminée à la question **III.6**, sous l'effet de processus dits de *relaxation*. On donne les équations d'évolution des coordonnées  $(M_X, M_Y, M_Z)$  de l'aimantation dans  $R'$  à la résonance et en l'absence de champ  $\vec{B}_1$  :

$$\begin{aligned}\frac{dM_X}{dt} &= -\frac{M_X}{T_2} \\ \frac{dM_Y}{dt} &= -\frac{M_Y}{T_2} \\ \frac{dM_Z}{dt} &= -\frac{M_Z - M_0}{T_1}.\end{aligned}$$

$T_1$  et  $T_2$  sont deux constantes appelées temps de relaxation. On donne les valeurs  $T_1 = 0,9$  s et  $T_2 = 0,1$  s pour un proton appartenant à la matière grise du cerveau. Expliquer pourquoi il est légitime, avec ces valeurs, de négliger les processus de relaxation entre les instants  $t = 0$  et  $t = \tau$ . Résoudre ces équations pour  $t > \tau$  tracer les variations de  $M_X$ ,  $M_Y$  et  $M_Z$ .

**IV.11** L'IRM consiste à mesurer l'aimantation au cours du temps pour  $t > \tau$ , et à en déduire  $T_1$  et  $T_2$ , qui dépendent fortement de l'environnement du proton et donnent des informations fines sur la nature des tissus contenus dans l'échantillon étudié. On utilise, pour mesurer  $T_2$ , la technique d'écho de spin exposée à la question **IV.9**. Quelle valeur de  $T_E$  choisiriez vous pour cette mesure ?

\* \*  
\*