ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2003

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

La glace dans la nature

L'objet de ce problème est l'étude des couverts de glace à la surface de la terre.

Dans une première partie, on étudie la croissance d'une couche de glace lorsque sa température de surface est contrôlée, en utilisant pour cela l'approximation quasi stationnaire. Puis l'on examine les effets d'un manteau de neige sur la formation de la couche de glace à la surface d'un lac. On évoque enfin dans la dernière partie l'évolution saisonnière de la glace arctique.

Toutes les parties sont largement indépendantes les unes des autres. Sauf indication contraire, la pression P est constante et égale à la pression atmosphérique moyenne, soit $1,01325 \times 10^5$ Pa.

Une grande attention devra être apportée aux applications numériques.

Données numériques :

Capacité thermique massique de la glace	$c_G = 2,09 \times 10^3\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$
Capacité thermique massique de l'eau	$c_E = 4,18 \times 10^3\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$
Conductibilité thermique de la glace	$\lambda_G = 2,215\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
Conductibilité thermique de la neige	$\lambda_n = 0,3\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_0 = 1,00 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
Masse volumique de la glace	$\rho_G = 0,915 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
Masse volumique de la neige	$\rho_n = 0,33 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
Enthalpie de fusion de la glace	$L = 0,333 \times 10^6\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$

les données précédentes sont supposées indépendantes de la température.

Température de fusion de la glace $T_F = 0,00\,°\mathrm{C}$

Bilan radiatif à la surface de la banquise arctique :

Coefficients

$T_J = 15,7\,°\mathrm{C}$ $T_N = -43,3\,°\mathrm{C}$

$B_J = 1,4\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ $B_N = 1,8\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$

I. Le problème de Stefan

La figure 1 illustre le problème de la formation d'une couche de glace tel qu'il fut formulé dans le travail pionnier de Stefan (1891). La surface d'un volume d'eau initialement à la température de fusion T_F est mis en contact à l'instant $t = 0$ avec une paroi plane, maintenue en position fixe et à température $T_S < T_F$. Une couche de glace apparaît et se développe progressivement au sein du fluide. On note $\xi(t)$ la position de l'interface entre l'eau et la glace ; la glace occupe l'espace $0 \leqslant z \leqslant \xi(t)$. Soit $T_G(z, t)$ le champ de température dans la glace, supposé unidimensionnel. On suppose que $T_G(z = 0, t) = T_S$.

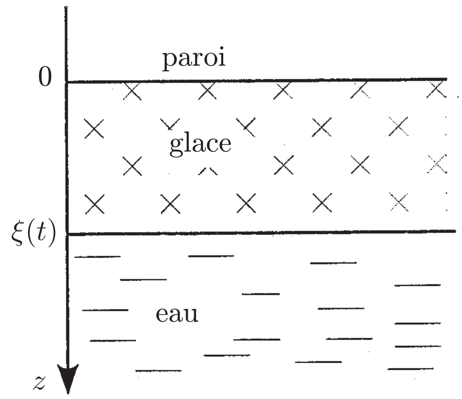

Figure 1

1. La diffusion thermique.

a) Exprimer la loi de Fourier reliant au sein de la glace la densité de courant d'énergie $\vec{J}_Q$ au gradient de température.

b) Effectuer un bilan énergétique sur un volume élémentaire de glace pour obtenir l'équation de la diffusion thermique, dite « de la chaleur ».

c) Quelles sont les conditions aux limites pour le champ de température de la glace ? Permettent-elles de déterminer $T_G(z, t)$?

d) Que peut-on dire de la température au sein de l'eau ?

e) Pourquoi l'eau est-elle mise en mouvement par l'avancée de l'interface ?

2. Soient H_G l'enthalpie massique de la glace et H_E celle de l'eau que l'on suppose indépendantes de la température. On désigne par $v_G = \dot{\xi}(t)$ la vitesse de l'interface et par v_E la vitesse verticale de l'eau.

a) En raisonnant sur un cylindre vertical de section S, exprimer à l'aide de $\dot{\xi}(t)$ la masse d'eau qui s'est transformée en glace entre les instants t et $t + dt$.

b) Effectuer le bilan enthalpique de cette masse entre ces deux instants (on négligera la variation d'énergie cinétique de l'eau qui gèle).

c) En déduire la relation suivante :

$$\lambda_G \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{\xi(t)} = \rho_G \, L\dot{\xi}(t) \qquad (1)$$

3. On suppose que $\dot{\xi}(t)$ est suffisamment faible pour admettre que la distribution de température dans la glace est à tout instant celle de l'état stationnaire pour l'épaisseur de glace formée à cet instant (approximation quasi stationnaire).

a) Pourquoi n'a-t-on jamais rigoureusement de régime permanent ?

b) Que devient l'équation de la chaleur dans l'approximation quasi stationnaire ? En déduire le profil puis le gradient de température au sein de la glace.

c) Déduire alors de l'équation (1) une équation différentielle portant sur $\xi(t)$. Montrer que $\xi(t) = \sqrt{2Dt}$ où D est une constante que l'on explicitera.

d) *Application numérique* : calculer D pour $T_S = -30°\text{C}$. Calculer l'épaisseur de glace après un jour, une semaine, un mois, six mois.

II. Effet d'une couche de neige

On souhaite étudier l'effet d'un couvert de neige sur la croissance de la glace. On suppose qu'il existe une couche de neige d'épaisseur h_n constante, présente dès l'instant initial sur une très mince couche de glace (figure 2). On note T_{nG} la température à l'interface neige/glace.

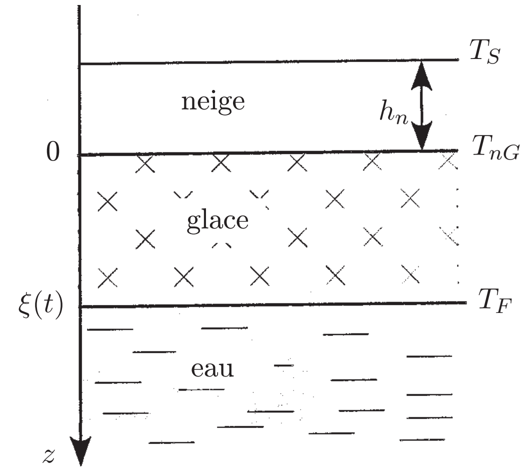

Figure 2

1. Quelle est la forme des profils de température au sein de la neige et de la glace en régime quasi stationnaire ? Quelle condition doit être vérifiée à l'interface neige/glace ?

2. Soit J_{Qz} la composante verticale de la densité de courant d'énergie $\vec{J_Q}$. Exprimer J_{Qz} en fonction de $T_{nG} - T_S$, puis de $T_F - T_{nG}$. Exprimer alors J_{Qz} en fonction de $T_F - T_S$ et de $\xi(t)$.

3. En déduire la nouvelle équation différentielle portant sur ξ. Montrer que la solution satisfaisant aux conditions initiales est :

$$\xi(t) = \sqrt{2Dt + \xi_n^2} - \xi_n$$

où ξ_n est une longueur caractéristique que l'on explicitera.

4. *Application numérique* : Calculer l'épaisseur de glace obtenue après un jour, une semaine, un mois et six mois pour $T_S = -30°\text{C}$ et $h_n = 0,2$ m.

5. La neige joue-t-elle un rôle dans la croissance des couverts de glace ?

III. Variation saisonnière de la glace arctique

Dans cette partie, toutes les températures sont exprimées en degré Celsius et toutes les durées en jour. On admet que l'évolution de la banquise au-delà du cercle polaire est entièrement contrôlée par l'équilibre qu'elle entretient avec l'atmosphère. Un modèle simple prédit que le flux surfacique d'énergie reçue par la banquise est de la forme

$$J_Q(0^-) = B_i(T_i - T)$$

où T est la température de surface de la banquise.

Les paramètres B_i et T_i peuvent prendre deux valeurs suivant la saison. On admettra qu'il n'existe que deux saisons appelées saison chaude J et saison froide N. Chacune dure six mois. On ne prend pas en compte la salinité de l'eau de mer ; on considère que la banquise gèle à 0°C et qu'elle est entièrement caractérisée par sa température de surface $T(t)$ (en contact avec l'air) et son épaisseur $h(t)$ (figure 3). On se place dans l'approximation quasi-stationnaire (cf. **I.3.**) et l'on note $t_{1/2}$ la durée d'une demie année.

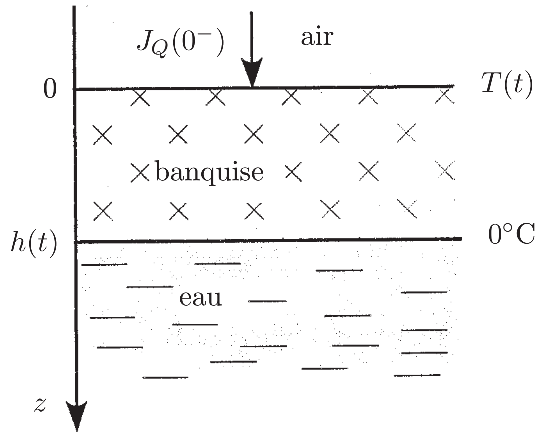

Figure 3

La saison froide

Au début de la saison froide, la banquise a une épaisseur h_0 et une température uniforme de 0°C.

1. Première phase. On admet que la banquise ne fait que se refroidir et son épaisseur reste égale à h_0. On modélise à tout instant la distribution de température de 0°C à $T(t)$ dans la banquise par une loi linéaire.

a) Quelle quantité d'énergie (par unité de surface) doit-on fournir à la banquise quand sa température de surface change de dT ?

b) En déduire l'équation d'évolution de $T(t)$.

c) On admet que cette phase dure tant que le flux thermique dans la banquise calculé dans ce modèle reste inférieur au flux surfacique. À quelle température T_0 a-t-on égalité des densités de courant thermique en surface ?

d) Au bout de quelle durée t_0 la température de surface a-t-elle atteint T_0 ?

On introduira $\tau_0 = \dfrac{\rho_G c_G h_0}{2B_N}$, $h_N = \dfrac{\lambda_G}{B_N}$.

e) *Application numérique* : calculer h_N puis T_0, τ_0 et t_0 pour une épaisseur initiale h_0 de 1 m, 3 m et 5 m.

2. Deuxième phase : la couche de glace se met à croître ; on suppose toujours la distribution de température linéaire mais avec un flux thermique égal à celui imposé à la surface.

a) Exprimer la densité de courant thermique au sein de la banquise en fonction de $T(t)$ et de $h(t)$. Montrer que la condition d'égalité des flux détermine T en fonction de h ; exprimer T en fonction de h à l'aide de T_N et de h_N.

b) Reprendre dans le cadre de ce modèle l'équation (1).

On pose $\tau_N = -\dfrac{\rho_G L h_N^2}{2\lambda_G T_N} = -\dfrac{\rho_G L \lambda_G}{2B_N^2 T_N}$. Montrer que, pour $t_0 \leqslant t \leqslant t_{1/2}$,

$$h(t) = h_N \left[\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau_N} + \left(1 + \frac{h_0}{h_N}\right)^2} - 1\right]$$

c) *Application numérique* : calculer l'épaisseur de la banquise $h_{1/2}$ et sa température de surface $T_{1/2}$ à la fin de la saison froide pour une épaisseur initiale h_0 de 1 m, 3 m et 5 m.

La saison chaude

L'apparition du soleil change le bilan thermique au niveau de la surface de la banquise. Il devient positif et la banquise va se réchauffer avant de fondre en surface.

3. Troisième phase. La banquise commence d'abord par se réchauffer jusqu'à ce que toute sa masse atteigne 0°C. On adopte le même modèle qu'en **III.1.**

a) On pose $\tau_1 = \dfrac{\rho_G c_G h_{1/2}}{2B_J}$. Montrer que la durée t_1 de ce réchauffement s'écrit $t_1 = \tau_1 \ln\left(1 - \dfrac{T_{1/2}}{T_J}\right)$.

b) *Application numérique* : calculer t_1 pour une épaisseur initiale h_0 de 1 m, 3 m et 5 m.

4. Quatrième phase. La banquise fond par sa surface au contact de l'air.

a) Montrer que, dans cette étape, l'épaisseur de la banquise décroît linéairement avec le temps.

b) *Application numérique* : calculer les épaisseurs obtenues à la fin de la saison chaude pour un couvert en début de saison froide h_0 de 1 m, 3 m et 5 m.

À partir des résultats numériques, montrer que ce modèle rend plausible pour $h(t)$ l'existence d'une solution périodique de période un an.

* *
*

Rapport de MM. Marc HIMBERT et Philippe LAFARGE, correcteurs.

La deuxième composition de physique proposait une étude détaillée des couverts de glace à la surface de la Terre. La lecture de ce seul intitulé aurait permis à de nombreux candidats de mieux appréhender l'ordre de grandeur des résultats numériques attendus tout au long du problème...

Dans la **partie I**, le « problème de Stefan » proposait l'étude thermodynamique de la croissance d'une couche de glace lorsque la condition aux limites du problème de diffusion thermique est une température fixée. Puis, on analysait (**partie II**) l'effet d'une couche de neige, susceptible d'affecter les transferts thermiques entre l'atmosphère (imposant la température de surface) et la glace en cours de formation. Enfin, la prise en compte de l'évolution des conditions aux limites permettait de mettre en évidence, en vraie grandeur et de façon fort convaincante malgré la simplicité du modèle, l'existence d'une solution périodique pour l'évolution des couverts de glace dans les régions arctiques (**partie III**).

Le barème de correction retenu a accordé un poids égal aux deux premières parties d'une part, à la troisième d'autre part ; achever complètement la seule première partie permettait d'obtenir environ 6,5/20. La répartition des notes des candidats français est la suivante :

$0 < N < 4$	3%
$4 \leqslant N < 8$	20%
$8 \leqslant N < 12$	40%
$12 \leqslant N < 16$	28%
$16 \leqslant N \leqslant 20$	9%

La moyenne s'établit (candidats français) à près de 10,71 avec un écart quadratique moyen de 3,69. L'épreuve s'est donc révélée sélective, tout en étant globalement bien réussie par les candidats, alors qu'elle abordait une partie du programme assez rarement évoquée à l'écrit dans les annales. Le nombre de très faibles notes est limité, les premières questions étant de simples applications des lois fondamentales vues en cours et, semble-t-il, retenues convenablement. Les correcteurs ont rencontré également un nombre très significatif de « bonnes » ou « très bonnes » copies.

Première partie

Rares sont les copies qui obtiennent le maximum de points.

En fait, dès la première question explicitant le phénomène de diffusion thermique, les réponses traduisent à la fois la maîtrise globale des équations (même si le bilan élémentaire demandé est quelquefois bien rapidement établi, ou établi dans un contexte non unidimensionnel, ou avec une erreur de signe...) et un manque de recul dès qu'il s'agit d'interpréter physiquement, par exemple, l'origine des conditions aux limites. Postuler l'uniformité de température dans l'eau semble généralement illégitime (on se demande d'où viendraient les gradients oscillants souvent invoqués) ; de même les causes du mouvement de l'eau (avant tout, un simple effet de pression à l'interface) sont rarement explicitées correctement.

L'équation reliant l'évolution de la position de l'interface au gradient de température, donnée au **I.2.c**, est évidemment une équation-clef pour la suite. Rares sont les candidats qui y parviennent par la démarche pédestre et sûre proposée dans le texte. En fait, beaucoup confondent bilan enthalpique et bilan énergétique, sans justification (on est à pression contrôlée), ou se perdent dans des éléments différentiels dont ils ne perçoivent pas l'importance. Cette question, difficile, a été notée avec mansuétude.

On proposait ensuite d'effectuer l'approximation quasi stationnaire, évidemment justifiable aisément par l'expérience si l'on veut appliquer le modèle aux couverts de glace terrestres... La différence avec un régime permanent est rarement perçue. En revanche l'équation de diffusion est écrite et résolue dans la plupart des copies. L'application numérique demandée, qui permet d'illustrer le phénomène et de préparer les interprétations ultérieures, est effectuée le plus souvent avec justesse : l'épaisseur croît lentement de 0,19 m le premier jour pour atteindre 2,60 m après un semestre, ce qui valide a posteriori l'approximation effectuée.

Il convient de rappeler à ce stade que l'intitulé des questions **I.3.b**. et **c**. est non ambigu : « déduire » (au **b**. et **c**.) signifie qu'une démonstration algébrique est requise ; « montrer que » exige également d'autres considérations que le simple remplacement par la solution proposée, à moins que les candidats n'invoquent à bon escient des théorèmes mathématiques sur les équations différentielles (était-ce bien indispensable ?) dont ils doivent alors préciser l'énoncé et vérifier les conditions d'applicabilité. Cette remarque importante vaut également pour les questions plus difficiles **II.3.** et **III.2.b**...

Deuxième partie

Assez bien réussie également par l'ensemble des candidats, la deuxième partie exigeait cependant des réponses simples mais précises aux questions posées.

Au **II.1**, les profils de température attendus sont linéaires dans les deux milieux. À l'interface, évidemment la température est constante (nous sommes au même point) mais aussi le flux thermique, a priori non égal au gradient de température... On obtient ainsi une double expression du courant d'énergie, qui permet d'éliminer la température inconnue à l'interface (**II.2**) et d'écrire l'équation d'évolution de $\xi(t)$. Il s'agit d'une équation à variables séparées, du second degré en $\xi(t)$, simple à résoudre. La longueur ξ_n (positive) intervenant dans l'expression fournie résulte des conditions aux limites. Elle vient retarder la croissance des couverts de glace, pour laquelle, donc, la neige joue un rôle relatif d'autant plus important que les durées considérées sont brèves.

On peut, bien sûr, féliciter quelques candidats perdus dans les alternances de signes aux questions 1 et 2 d'avoir vu et annoncé leur erreur, puis su, sans doute par des considérations physiques, retrouver les signes convenables lorsqu'il s'est agi d'obtenir la solution donnée au 3. Mais pourquoi tant d'autres, qui pratiquent de même en catimini, croient-ils que leur démarche illicite passera inaperçue ?

Troisième partie

Résoudre jusqu'au bout la troisième partie exigeait des qualités d'ordre et de méthode dans la succession des réponses, et de soin dans les applications numériques : celles-ci, en s'enchaînant, pouvaient rendre peu exploitables les résultats obtenus dans les dernières questions si l'on ne prenait pas garde à de grossières erreurs de troncature.

Une approche trop hâtive de la première question (*première phase* de la **saison froide**) conduisait à l'échec, pour deux raisons principales :

- Au **III.1.a**, l'augmentation dT de température de surface de la banquise ne se traduit pas par une augmentation globale de sa température de dT, puisqu'à son autre extrémité la température est invariable... un modèle linéaire simple et une intégration (ou un raisonnement de moyenne) introduit un facteur correctif $1/2$. Moins d'une copie sur deux le remarque.
- Au **III.1.b**, et dans la suite, il faut tenir compte de la modélisation des échanges avec l'atmosphère, qui vient se substituer, et non s'ajouter, au terme établi dans les parties précédentes. Là encore, moins d'une copie sur deux le comprend.

On obtient alors pour l'évolution de $T(t)$ une équation différentielle homogène du premier ordre à coefficients constants, qui permet le refroidissement attendu de la banquise jusqu'au changement de régime... et un tableau de résultats numériques dans lequel la conversion des durées en jours (plutôt qu'en millions de secondes) apportait une lisibilité bien supérieure (le jour, symbole d, est une unité non SI en usage avec le Système international d'unités valant 86400 s ; voir www.bipm.org).

Les correcteurs ne peuvent s'empêcher de souligner à nouveau le caractère vain des corrections de dernière minute : les candidats n'ayant pas perçu l'importance de la condition fixée à l'autre limite de la banquise, et donc manqué le facteur $1/2$, pouvaient s'en apercevoir à la **question III.3**, puisque l'expression qu'ils obtenaient alors différait de celle du texte. En rajoutant à la hâte, sans justification réelle, un facteur 2 (parfois en position aléatoire) dans les expressions, en se trompant alors dans les applications numériques, pensent-ils vraiment convaincre les correcteurs de leurs facultés de compréhension, de leur aptitude à progresser, pas à pas, vers la solution maîtrisée d'un problème physique ? En résumé, croient-ils vraiment obtenir des points de la sorte ?

Dans la *deuxième phase*, la croissance du couvert de glace reprend, et une succession d'expressions algébriques un peu lourdes (souvent mal maîtrisées) conduit au résultat proposé dans l'énoncé : il faut exprimer en fonction de h, qui intervient dans la température, le gradient thermique, écrire puis intégrer compte tenu des conditions initiales l'équation différentielle en h obtenue ; il faut enfin résoudre l'équation du second degré en h. En fin de période, l'épaisseur de la banquise a augmenté de façon monotone, d'autant plus fortement et rapidement que l'épaisseur initiale était faible (lois non linéaires). Les remarques exprimées plus haut pour la résolution de l'équation différentielle au **I.3** s'appliquent pleinement à la question **III.2.b**.

Lorsqu'arrive la **saison chaude**, que très peu de candidats ont abordée, la banquise commence par se réchauffer, avant de fondre ; reprendre l'équation du **III.1.b** conduit immédiatement à la solution (équation du premier ordre en T, à coefficients constants). Bien évidemment la durée du réchauffement est d'autant plus grande que l'épaisseur en début de période est plus importante, donc que l'épaisseur est plus importante.

Dans la *dernière phase*, la banquise fond : l'équation d'évolution de son épaisseur est établie en écrivant à nouveau un bilan thermique, compte tenu de l'expression postulée constante du flux d'énergie incident. La décroissance linéaire trouvée, combinée avec les résultats obtenus au **III.2** pour connaître l'épaisseur en fin de saison froide, et avec les résultats obtenus aux **III.3** et **III.2** pour apprécier la durée pendant laquelle s'opère la fusion, permettent d'obtenir l'épaisseur attendue en fin de cycle annuel. Les trois épaisseurs initiales testées de 1 m, 3 m, 5 m, conduisent en fin de cycle pour la plus faible à une augmentation, pour la plus forte à une diminution... ce qui suggère l'existence d'une solution intermédiaire périodique stable (proche de 3 m d'ailleurs) à l'échelle de l'année.

Ces valeurs, issues d'un modèle très approché, n'ont rien de déraisonnable... De très rares candidats l'ont remarqué, et ont achevé convenablement cette troisième partie.

Les **conclusions** évoquées l'an passé restent pertinentes :

– les candidats sont assez bien préparés, bien qu'ils soient fort peu à l'aise pour bâtir des bilans sur des volumes ou à travers une surface élémentaires : maîtrisent-ils vraiment la notion de flux ?

– ils manquent cependant du bon sens et du recul nécessaires pour appréhender l'applicabilité au monde réel de leurs déductions ; il nous semble cependant que des croissances de banquise de l'ordre du micromètre par mois, ou inversement de l'ordre d'une dimension interstellaire, ne devraient pas être données sans commentaire critique !

– par ailleurs la rédaction d'une épreuve de physique suppose une maîtrise élémentaire de la syntaxe (une phrase comporte a priori un sujet, un verbe conjugué, quelquefois un complément) et de l'orthographe (l'expression NRJ – il faut épeler à voix haute – rencontrée à plusieurs reprises, n'évoque pas pour les correcteurs une grandeur physique, mais constitue l'intitulé d'une station radiophonique...).