

A 2005 PHYS. II

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2005

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II -PSI

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 7 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement.
- Notations : vecteur $\rightarrow \mathbf{V}$ (gras) ; norme du vecteur $\mathbf{V} \rightarrow V$ (italique) ; vecteur unitaire $\rightarrow \hat{\mathbf{a}}$.

ÉCOULEMENT DE FLUIDE DANS UNE ROCHE

L'objet de ce problème est de dégager des paramètres importants en pétrophysique. Un gisement est constitué d'un ou de plusieurs réservoirs superposés ou proches latéralement ; le réservoir est une formation rocheuse du sous-sol, poreuse et perméable, renfermant une accumulation naturelle d'hydrocarbure et limitée par une barrière de roche imperméable. La caractéristique essentielle de ces réservoirs est que ce sont des milieux poreux : les fluides sont stockés se déplacent dans des pores de dimensions de l'ordre du μm , ce qui met en jeu de forces de viscosités et de capillarité. La pétrophysique est l'étude des caractéristiques physiques des roches. Pour qu'une roche puisse constituer un réservoir, il faut :

- Qu'elle ait une certaine capacité de stockage, propriété caractérisée par la porosité.
- Que les fluides puissent y circuler, propriété caractérisée par la perméabilité.
- Qu'elle contienne une quantité suffisante d'hydrocarbures, avec une concentration suffisante, propriétés caractérisées par le volume imprégné ainsi que la saturation des pores.

I – Étude de l'écoulement de Poiseuille

La pesanteur est négligée dans cette partie. On s'intéresse à l'écoulement incompressible d'un fluide visqueux de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ , avec $\frac{D\rho}{Dt} = 0$.

Dans un tuyau cylindrique d'axe Oz et de rayon a , cet écoulement, considéré comme unidirectionnel, est caractérisé, dans un repère de coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz , par

un champ de vitesse $\mathbf{v} = v(r, z, t)\hat{\mathbf{u}}_z$ vérifiant $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\rho = 0$. L'évolution du champ des vitesses est décrite par l'équation de Navier-Stokes, $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{grad}P + \eta \Delta \mathbf{v}$ [1].

On trouvera en fin d'énoncé une figure et un formulaire relatifs aux coordonnées cylindriques. L'identité $\text{div}(f\mathbf{A}) = f \text{div}(\mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}(f)$ pourra se révéler utile.

□ 1 – Rappeler la signification de chacun des trois termes de l'équation [1]. Écrire l'équation (qui sera notée [2]) traduisant, dans le cas général, la conservation de la matière et simplifier cette équation pour tenir compte de l'incompressibilité de l'écoulement.

□ 2 – Montrer qu'en régime permanent le champ des vitesses ne dépend que de r ; en déduire que le terme d'accélération $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ est nul.

□ 3 – Montrer alors que la pression ne dépend que de la variable z , puis établir l'équation différentielle liant $v(r)$ à r et $\frac{dP}{dz}$.

□ 4 – Considérant que $v_z(0)$ a une valeur finie, déduire de ce qui précède la loi de Poiseuille, $v_z(r) = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right) (r^2 - a^2)$. Tracer l'allure du graphe de $v_z(r)$ pour $\frac{dP}{dz} < 0$.

□ 5 – Exprimer le débit volumique total de la conduite sous la forme : $Q_p = -K \left(\frac{dP}{dz} \right)$ en exprimant K en fonction de a et de η . Quel est le signe du gradient de pression responsable d'un écoulement dans le sens positif de l'axe Oz ?

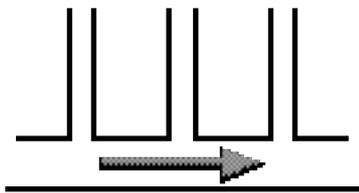


Fig. 1 : conduite et prises de pression.

□ 6 – Comment varie le champ des pressions dans une conduite horizontale de section constante et de débit Q_p ? Quelle est la différence entre cet écoulement et un écoulement de fluide parfait (écoulement de Bernoulli) ? La Fig. 1 représente une conduite cylindrique horizontale parcourue par un liquide, avec un débit Q_p et surmontée en divers endroits de tubes de prise de pression verticaux ouverts à l'air libre. Représenter l'allure des hauteurs de liquide dans les tubes verticaux, d'une part dans le cas de l'écoulement de fluide parfait, d'autre part dans le cas de l'écoulement visqueux de Poiseuille.

□ 7 – On constate que l'écoulement de Poiseuille est observé dans les tubes de petit diamètre ; à quel paramètre de l'écoulement faut-il comparer le diamètre de la canalisation ?

II – Porosité d'une roche réservoir

Un échantillon de roche, de volume total V_T , est constitué d'un volume solide V_S et d'un volume de pores V_P . On appelle porosité, et l'on note ϕ , le rapport $\phi = \frac{V_P}{V_T}$. Un échantillon est saturé en hydrocarbure si tous ses pores sont remplis de liquide. On distingue la porosité utile ϕ_u , qui permet la circulation des fluides, de la porosité totale, ϕ_T ; cela est dû à

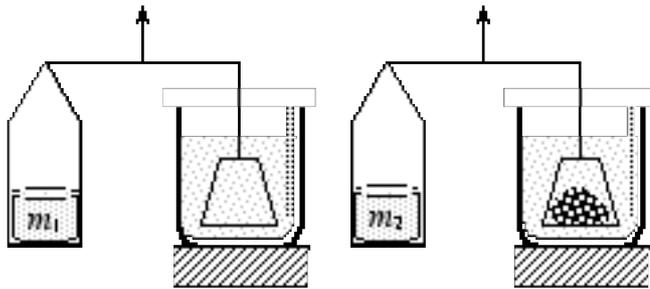
l'obstruction de certains pores, qui ne permet pas l'écoulement des fluides. On oubliera cette distinction dans la suite du problème, sauf dans la question 10.

□ 8 – De façon générale, la porosité est une fonction décroissante de la profondeur. Comment justifier ce fait expérimental ?

Mesure de la porosité

Pour mesurer la porosité d'un échantillon, on peut procéder par mesures de poussées d'Archimède sur des corps immergés dans divers liquides.

Mesure du volume total V_T

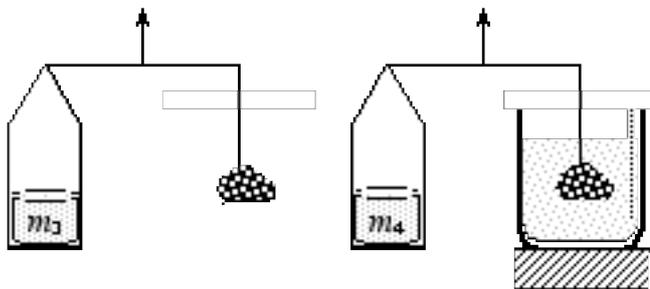


L'appareil représenté ci-contre mesure la poussée d'Archimède exercée par le mercure, de masse volumique μ_{Hg} , sur l'échantillon immergé. Les deux bras de la balance ont la même longueur. Cet échantillon est disposé sur une nacelle, qui subit elle-même la poussée d'Archimède. Dans un premier

temps, on équilibre la balance avec la nacelle seule ; dans un second temps, on équilibre la balance avec la nacelle chargée par l'échantillon. On suppose que le mercure ne pénètre pas dans les pores et l'on ne tient pas compte de la variation du niveau du mercure entre les deux manipulations.

Exprimer V_T en fonction de m_1 , m_2 , de la masse de l'échantillon, m et de μ_{Hg} (relation 9A).

□ 9 – Expliciter la notion de poussée d'Archimède. Expliquer pourquoi, si l'échantillon est suspendu à un fil, ce dernier ne perturbant la mesure en aucune manière, V_T ne s'exprime plus qu'en fonction de m_1 , m_2 et de μ_{Hg} (relation 9B).



□ 10 – Mesure de $V_S = V_T - V_P$

La balance est équilibrée, d'abord avec l'échantillon suspendu dans l'air, ensuite avec l'échantillon immergé dans un liquide solvant de masse volumique μ_{Solv} , qui envahit tous ses pores. Exprimer V_S en fonction de m_3 , m_4 et de μ_{Solv}

(relation 10). Déduire la porosité de ces quatre mesures, en considérant d'une part le couple de relations 9A-10, d'autre part le couple 9B-10. S'agit-il ici de ϕ_u ou de ϕ_T ?

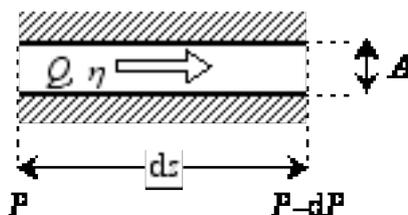


Fig. 2 : Notations pour la loi de Darcy

III – Perméabilité d'une roche

Loi de Darcy, premières modélisations

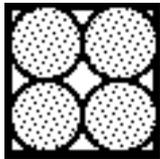
La perméabilité intrinsèque d'une roche est l'aptitude de cette roche à laisser circuler à travers ses pores un fluide dont elle est saturée. Cette grandeur peut être chiffrée grâce à la loi expérimentale de Darcy : soit un élément

cylindrique d'échantillon de longueur dz et de section A , saturé d'un fluide de viscosité dynamique η , qui le traverse horizontalement avec un débit volumique Q ; en régime permanent, la pression amont est P , la pression aval $P - dP$ ($dP > 0$). Les parois latérales sont étanches et il n'y a pas de réaction du fluide sur la roche (cas général) ; dans ces conditions, $Q = A \frac{k}{\eta} \frac{dP}{dz}$, où k , coefficient de perméabilité est, en première approximation, indépendant du fluide considéré (loi de Darcy).

□ 11 – Quelle est la dimension de k ?

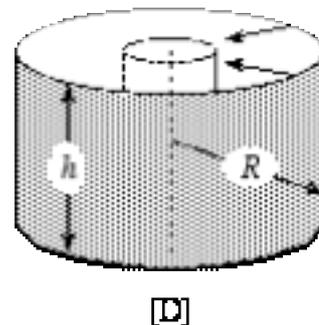
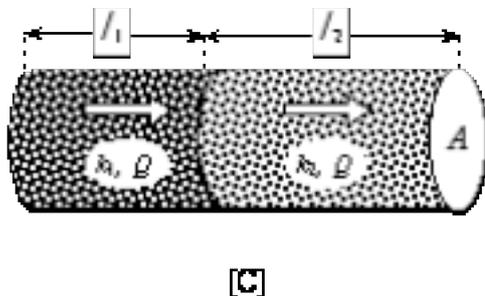
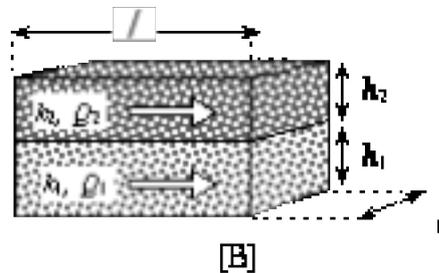
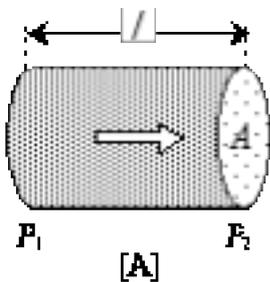
□ 12 – En modélisant l'échantillon de roche comme un faisceau de N cylindres ($N \gg 1$), de rayon a ($a \ll \sqrt{A}$), juxtaposés et d'axes parallèles à Oz , montrer que la loi de Darcy peut être déduite de l'écoulement de Poiseuille étudié dans la première partie ; quelle est, dans cette modélisation, la valeur de la constante k ?

□ 13 – Toujours dans le modèle de la roche à tubes cylindriques parallèles identiques, quelle est la relation liant ϕ à k ?



□ 14 – Le problème de la limite de k et de ϕ pour N infini n'est pas simple. Examiner pour le voir le cas (imaginaire !) d'un tube de section carrée de côté 1, rempli de façon compacte par $N = M^2$ cylindres identiques de rayon $r_N = \frac{1}{2M}$. La figure ci-contre illustre le cas $M = 2$.

Loi de Darcy et diverses géométries d'écoulements



Diverses géométries d'écoulements : simple en [A], parallèle en [B], série en [C] et cylindrique en [D]. Les flèches indiquent le sens des divers écoulements.

• *Écoulements unidirectionnels*

□ 15 – Calculer Q pour un écoulement simple dans un cylindre de longueur λ et de section A (Fig. [A]).

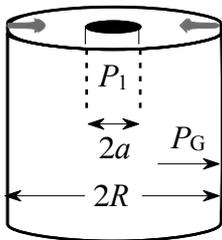
□ 16 – Définir la perméabilité équivalente k_m d'une association de deux terrains de perméabilité différentes, dans les deux cas suivants :

— association en parallèle (Fig. [B]) : deux couches planes géologiques, de même largeur e , de même longueur λ , d'épaisseurs respectives h_1 et h_2 et de perméabilités respectives k_1 et k_2 , superposées parallèlement à la direction d'écoulement.

— association en série (Fig. [C]) : deux couches planes géologiques, de même section A , de longueurs respectives λ_1 et λ_2 et de perméabilités respectives k_1 et k_2 , juxtaposées parallèlement à la direction d'écoulement.

• *Écoulement radial*

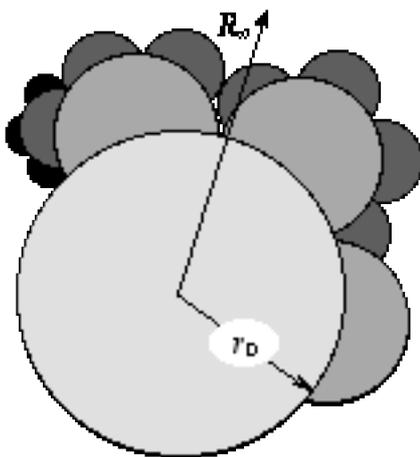
□ 17 – On considère le régime permanent d'écoulement dans la portion d'échantillon de symétrie cylindrique représentée Fig. [D]. La hauteur de l'élément est h , la pression en un point du cylindre intérieur est $P(R_i) = P_i$ la pression à l'extérieur est $P(R_e) = P_e$, avec $P_e > P_i$. Montrer que la vitesse d'écoulement en un point à la distance r de l'axe est proportionnelle à $1/r$; que peut-on en déduire sur le débit $Q(r)$? Appliquer la loi de Darcy entre deux cylindres de rayons r et $r + dr$ et par intégration calculer $P_e - P_i$ en fonction de h, k, η, R_i, R_e et Q .



Puits de forage

□ 18 – Application : la pression dans un puits de forage cylindrique de rayon a creusé dans la roche poreuse et implanté loin des limites de la couche géologique est notée P_1 ; on constate qu'à partir d'un rayon R ,

dit rayon de drainage, la pression ne varie plus et vaut P_G (pression de gisement¹) ; exprimer le débit du puits en fonction de P_G, P_1, R, a, h et k .



Une figure auto-similaire. L'enveloppe est un cercle de rayon R_0

Modélisation fractale autosimilaire

Pour décrire le milieu poreux de manière plus réaliste qu'avec le modèle des cylindres parallèles identiques, l'Institut Français du Pétrole a développé un modèle où le milieu est toujours représenté par un assemblage de tubes cylindriques parallèles à la direction d'écoulement, mais où les rayons des tubes sont décrits de manière itérative : le périmètre du disque initial, de rayon r_0 , est divisé en 2ν parties égales. Chacune de ces parties est prolongée par un demi disque s'appuyant sur le contour du grand cercle. L'entier ν étant assez grand, on néglige la courbure du cercle de départ. On divise ensuite le contour de chaque demi-disque ainsi créé en ν parties égales, sur lesquelles on ajoute

¹ Cette « saturation » exprime la limite de validité de la loi donnant $P_e - P_i$ en fonction des rayons.

des demi-disques et ainsi de suite. À la p -ième étape on compte $N_p = 2 \times \nu^p$ nouveaux demi-disques, de rayon $r_p = \left(\frac{\pi}{2\nu}\right)^p r_0 = \varepsilon^p r_0$ (ce qui définit ε) et recouvrant une aire

$$A_p = N_p \times \frac{\pi}{2} r_p^2 = \left(\frac{\pi^2}{4\nu}\right)^p A_0 \text{ (on néglige les recouvrements partiels possibles).}$$

L'enveloppe du processus est le cercle de rayon $R_\infty = \sum_{p=0}^{\infty} r_p$, son aire apparente est $A = \pi R_\infty^2$ et son aire

$$\text{réelle } A_r = \sum_{p=0}^{\infty} A_p.$$

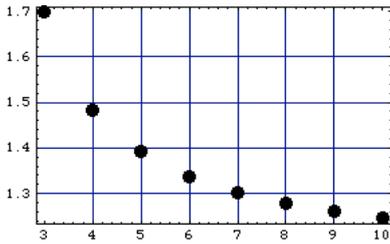
□ 19 – Calculer la porosité ϕ_M du modèle fractal en fonction de ν , faire l'application numérique pour $\nu = 5$.

□ 20 – La dimension fractale capacitive, $D_c(\nu)$, précise quantitativement la manière dont le nombre de motifs, M_p , augmente quand la taille relative de ces motifs, ε_p , diminue. La

relation $D_c = -\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\ln(M_p)}{\ln(\varepsilon)}$ définit la dimension du processus par le réel positif, non nécessairement entier, $D_c(\nu)$. Calculer $D_c(\nu)$ en remarquant que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\ln(M_p)}{\ln(\varepsilon)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\ln(N_p)}{\ln(\varepsilon)}.$$

La figure ci-dessous illustre graphiquement le résultat pour $3 \leq \nu \leq 10$. Supposant que, dans un échantillon de section A_r , chacun des tubes élémentaires définit un écoulement de Poiseuille, retrouver, dans le cadre de ce modèle, l'expression de la perméabilité k de la loi de Darcy en fonction de ϕ , ν ($\nu > 2$) et r_0 . Sachant que l'on peut déduire de certaines mesures $D_c \approx 1,4$, faire l'application numérique et comparer le résultat à celui de la question 12.



IV Essai de puits

On considère la circulation d'un fluide unique dans la couche rocheuse poreuse (hydrocarbure seul, sans eau et sans gaz dissous). Le gisement est homogène et isotrope, de perméabilité k et de porosité ϕ . La température du gisement est uniforme, la roche est incompressible et l'hydrocarbure possède un coefficient de compressibilité isotherme χ_T constant. La vitesse de filtration, \mathbf{V}_{fil} , est le rapport du débit Q traversant une section à l'aire A de cette section.

□ 21 – Montrer que la loi de Darcy permet d'écrire, pour un écoulement permanent horizontal, la relation $\mathbf{V}_{fil} = -\frac{k}{\eta} \mathbf{grad} P$. Quelle différence y a-t-il entre la vitesse de filtration

\mathbf{V}_{fil} et la vitesse \mathbf{v} d'un point du fluide, telle qu'elle est introduite dans les premières questions ?

□ 22 – Exprimant le bilan de matière dans une portion de cylindre de section A et de longueur dz , écrire la loi de conservation de la masse du fluide sous la

$$\text{forme } \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{V}_{fil}).$$

□ 23 – Justifier qu'en première approximation l'on puisse accepter pour équation d'état du fluide la relation $\rho = \rho_0 [1 + \chi_T (P - P_0)]$. Quelle inégalité relative au produit $\chi_T \delta P$ cela implique-t-il, δP étant la variation typique de pression que l'on envisagera dans la suite ?

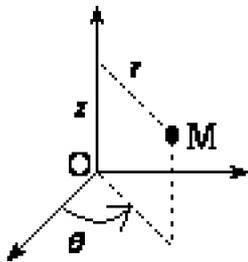
□ 24 – Dédurre de ce qui précède l'équation différentielle $\Delta P = \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t}$ et exprimer K en fonction de k , ϕ , η et χ_T . Comment peut-on, par analogie, nommer K ?

□ 25 – Calculer K pour $k = 400 \times 10^{-15} \text{ m}^2$, $\phi = 0,20$, $\chi_T = 2,0 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$ et $\eta = 0,1 \text{ Pa.s}$.

□ 26 – La loi de Darcy, établie pour un régime permanent, est à la base de l'équation de diffusion de la question 24, qui décrit un régime transitoire de pression. Quelle est donc la validité de cette dernière équation ?

FIN DU PROBLÈME

Coordonnées cylindriques d'axe Oz



$$\text{div}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta[f(r)\hat{u}_z] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) \hat{u}_z$$

$$\text{grad}[f(r, \theta, z)] = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{u}_z$$

FIN DE L'ÉPREUVE

1905-2005 Relation d'Einstein pour un mouvement lent

La viscosité η d'une solution peut intuitivement être représentée par un développement en série de la concentration c du soluté : $\eta(c) = \eta_0 (1 + k_1 c + k_2 c^2 + \dots)$, ce qui entraîne

$\eta_s = \frac{\eta}{\eta_0} - 1 = k_1 c + k_2 c^2 + \dots$. Einstein a établi pour des particules sphériques la relation

$\eta_s = 2,5\phi$, où ϕ est la fraction volumique du soluté dans la solution.

Si V_h est le volume hydraté d'une particule de masse molaire M et N_A le nombre d'Avogadro, alors $\phi = V_h \frac{N_A}{M} c$.

: