

A 99 PHYS. II

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)
CONCOURS D'ADMISSION 1999

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Sujet mis à disposition du concours ENTPE

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II - PSI

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 7 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.

- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives, ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : vecteur : \mathbf{V} (gras) ; norme du vecteur \mathbf{V} : V (italique) ; vecteur unitaire : $\hat{\mathbf{v}}$.

QUELQUES PROPRIÉTÉS MAGNÉTO-THERMIQUES DES MATÉRIAUX SUPRACONDUCTEURS

Les différentes parties de ce problème sont indépendantes ; à l'intérieur de chaque partie, les différents aspects abordés sont largement indépendants entre eux.

En fin d'énoncé, un formulaire donne quelques relations utiles.

Préliminaire : supraconducteurs

Les matériaux supraconducteurs de taille macroscopique ont les propriétés, en dessous d'une certaine température, d'une part de s'opposer à la pénétration d'une induction magnétique extérieure \mathbf{B}_{ext} , d'autre part de pouvoir être le siège de courants électriques, sans pour autant que cette circulation s'accompagne de dissipation d'énergie¹. On distingue notamment deux types de supraconducteurs : les *supraconducteurs de première espèce* se caractérisent par le fait que, tant que B_{ext} est inférieur à une certaine valeur critique B_c , le champ \mathbf{B}_{int} est nul à l'intérieur du matériau ; les *supraconducteurs de deuxième espèce* se caractérisent par l'existence de deux champs critiques, \mathbf{B}_{c1} et \mathbf{B}_{c2} ($B_{c1} < B_{c2}$) tels que, pour $B_{\text{ext}} > B_{c2}$, le matériau se comporte comme un conducteur normal, pour $B_{c1} < B_{\text{ext}} < B_{c2}$, le

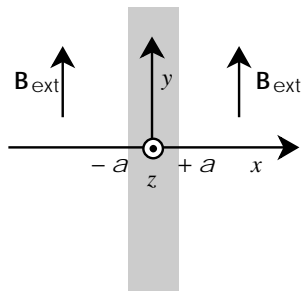
¹ Rappel : le vecteur \mathbf{B} est nommé « induction magnétique » et c'est le vecteur \mathbf{H} qui est normalement nommé « champ magnétique » ; dans tout le problème, il ne s'agira que de \mathbf{B} , et les candidats le nommeront comme ils en ont l'habitude.

champ \mathbf{B} pénètre partiellement dans le volume du matériau et pour $B_{\text{ext}} < B_{c1}$, le champ \mathbf{B} interne est nul ; il existe ainsi un domaine de champs extérieurs autorisant la présence d'effets dissipatifs associés au courant électrique. On appelle *transition* le passage du conducteur de l'état supraconducteur à l'état normal, ou résistif. La transition peut être obtenue par dépassement de la température critique, T_c , du conducteur, ou de l'induction magnétique critique, B_c du conducteur, ou enfin par dépassement de la densité de courant critique, J_c , dans le conducteur.

1ère Partie : supraconducteur de type I

Effet Meissner

On appelle *effet Meissner* l'expulsion des lignes de champ magnétique de l'intérieur du matériau supraconducteur ; le modèle présenté ci-dessous va indiquer que, en réalité, le champ pénètre partiellement dans le matériau, sur une faible épaisseur à partir de la surface.



On considère (voir figure ci-contre) une plaque supraconductrice illimitée de largeur $2a$, placée dans une région où règne une induction magnétique permanente et uniforme $\mathbf{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}} \hat{\mathbf{y}}$; on suppose que les courants surfaciques sont nuls en $x = \pm a$, ce qui assure la continuité du champ tangentiel. La loi d'Ohm locale est ici remplacée par l'équation phénoménologique locale de

London dans le supraconducteur : $\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \mathbf{A}$, où \mathbf{A} est

le potentiel vecteur, satisfaisant la condition de jauge de Coulomb ($\text{div} \mathbf{A} = 0$), et dont dérive l'induction magnétique \mathbf{B} .

□ 1 – Déterminer la dimension de λ .

□ 2 – On démontre (par exemple en considérant le rotationnel de l'équation de London) que, en régime permanent, les champs de vecteurs \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{j} vérifient l'équation d'inconnue \mathbf{X} : $\Delta \mathbf{X} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{X}$. Justifier que cette équation admet des solutions ne dépendant

que de x , déterminer les expressions de \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{j} à l'intérieur de la plaque et donner l'allure des composantes de \mathbf{B} et de \mathbf{j} .

□ 3 – Application numérique : $B_{\text{ext}} = 0,1 \text{ T}$, $\lambda = 50 \times 10^{-9} \text{ m}$ et $a = 2 \text{ mm}$. Déterminer la valeur maximale de j ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$) et la valeur numérique de B au centre, $B(0)$.

□ 4 – On introduit un noyau cylindrique supraconducteur de type I dans un solénoïde illimité de section circulaire. Y a-t-il augmentation ou diminution de l'inductance linéique de ce solénoïde ? Cet effet dépend-il du courant I traversant le bobinage du solénoïde ?

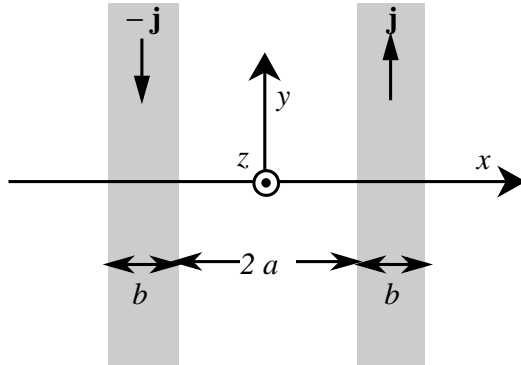
2ème Partie : supraconducteur de type II

La résistivité d'un tel matériau est rigoureusement nulle ; néanmoins, la densité de courant locale y reste limitée et l'on supposera que son module est, soit nul, soit égal à une certaine constante J_c , indépendante de l'induction magnétique \mathbf{B} , mais fonction décroissante de la température T .

Stabilité thermique d'une plaque supraconductrice en l'absence de courant de transport

On considère (voir fig. ci-après, qui précise les notations) deux couches planes, parallèles et indéfinies selon les directions y et z . Elles sont l'une et l'autre parcourues par des courants volumiques permanents, uniformes et opposés $j\hat{y}$ et $-j\hat{y}$.

On donne $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ pour $x > (a + b)$ et pour $x < -(a + b)$.



□ 5 – Exprimer le champ magnétique créé en tout point de l'espace par cette distribution de courant.

Une plaque supraconductrice illimitée de largeur $2a$ est placée dans une région où règne un champ magnétique permanent $\mathbf{B}_{ext} = B_{ext}\hat{z}$. Un *supracourant d'écrantage*, de densité volumique \mathbf{J}_c se développe à l'intérieur de la plaque et s'oppose à

\mathbf{B}_{ext} en produisant un champ magnétique antagoniste tel que $\mathbf{B}_{total} = \mathbf{0}$ pour $-a \leq x \leq a$. À partir de la périphérie de la plaque, ce supracourant circule sur une épaisseur b d'autant plus grande que B_{ext} est important ; il se referme à l'infini.

□ 6 – En supposant $0 < B_{ext} < \mu_0 J_c a$, déterminer la répartition du courant J d'écrantage et le profil d'induction à l'intérieur de la plaque, $B_z(x)$.

□ 7 – Déterminer ces répartitions en situation dite de *complète pénétration*, c'est-à-dire lorsque $B_{ext} > \mu_0 J_c a$. On se placera dans ce cas pour la suite.

À la suite d'une petite perturbation très brève dans l'intervalle de temps $[t, t + \delta t]$, la température varie de δT_1 et la densité de courant à l'intérieur de la plaque varie de δJ_c .

□ 8 – En remarquant que le champ électrique est nul au centre de la plaque, montrer que la perturbation de δT_1 donne naissance au champ électrique

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mu_0 \frac{\delta J_c}{\delta t} \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) \hat{y} & \text{pour } x > 0 \\ -\mu_0 \frac{\delta J_c}{\delta t} \left(\frac{x^2}{2} + ax \right) \hat{y} & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

□ 9 – Établir que l'énergie volumique moyenne dissipée dans la plaque consécutivement à la variation de la densité de courant critique est $\delta Q = -\frac{1}{3} \mu_0 a^2 J_c \delta J_c$.

L'état supraconducteur n'existe qu'en dessous d'une certaine température critique T_c . Soit c la capacité thermique volumique de la plaque supraconductrice, considérée comme thermiquement isolée et de température uniforme.

□ 10 – Montrer que si $a < a_c = \sqrt{\frac{3c}{\mu_0 J_c \left| \frac{\delta J_c}{\delta T} \right|}}$, la plaque est *intrinsèquement stable* ther-

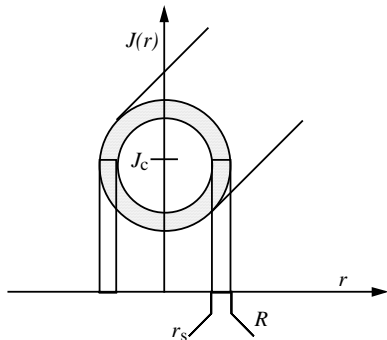
miquement, c'est-à-dire qu'une augmentation initiale de température δT_1 provoque dans un volume donné une dissipation d'énergie qui se résorbe, entraînant une augmentation de température $\delta T_2 < \delta T_1$. Que se passe-t-il pour $a > a_c$?

□ 11 – Calculer la valeur numérique de a_c pour $c = 5000 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$, $J_c = 2 \times 10^9 \text{ A.m}^{-2}$ et $\left| \frac{\partial J_c}{\partial T} \right| = 10^9 \text{ A.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

Stabilité thermique d'un supraconducteur parcouru par un courant permanent

Un conducteur supraconducteur infini cylindrique de rayon R est placé dans une région où l'induction magnétique extérieure est nulle. Un courant $I = \pi(R^2 - r_s^2)J_c$ (la densité de courant, J_c , est uniforme) circule, parallèlement aux génératrices du cylindre, sur la couche de ce brin comprise entre r_s et R , et en protège le centre de toute induction magnétique \mathbf{B} .

Posant $I_c = \pi R^2 J_c$ on a $r_s = R \sqrt{1 - \frac{I}{I_c}}$.



□ 12 – Établir l'expression suivante du champ \mathbf{B} à l'intérieur du milieu ($\hat{\theta}$ vecteur unitaire selon la direction θ)

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 J_c}{2} \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \right] \hat{\theta} & \text{si } r_s < r < R \\ \mathbf{0} \text{ (vecteur nul)} & \text{si } 0 < r < r_s \end{cases}$$

□ 13 – Une petite perturbation de température δT_1 dans l'intervalle $[t, t + \delta t]$, entraîne une variation de la densité de courant critique δJ_c . Montrer qu'apparaît dans le conducteur, pour $r > r_s$, le champ électrique

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0}{2} \frac{\delta J_c}{\delta t} \left[\frac{r^2 - r_s^2}{2} - R^2 \ln \frac{r}{r_s} \right] \hat{\mathbf{z}}.$$

□ 14 – La densité volumique moyenne d'énergie dissipée dans le conducteur, Q_{cp} , se déduit simplement (mais après un calcul lourd) de la densité volumique de perte $p(t) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_c$:

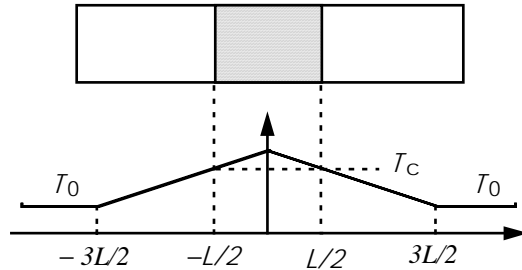
$$\begin{aligned} Q_{cp} &= \frac{\mu_0}{8} R^2 J_c \delta J_c \left[\left(\frac{I}{I_c} \right)^2 + 2 \frac{I}{I_c} + 2 \ln \left(1 - \frac{I}{I_c} \right) \right] \\ &= \mu_0 R^2 J_c \delta J_c f \left(\frac{I}{I_c} \right) \end{aligned}$$

Montrer que, si $R < R_{\max} = \sqrt{\frac{c}{\mu_0 J_c \frac{\partial J_c}{\partial T} f \left(\frac{I}{I_c} \right)}}$, le conducteur est intrinsèquement stable.

Calculer R_{\max} pour $I = 0,8 I_c$, $c = 5000 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$, $J_c = 2 \times 10^9 \text{ A.m}^{-2}$ et $\left| \frac{\partial J_c}{\partial T} \right| = 10^9 \text{ A.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Les conducteurs supraconducteurs sont composés de plusieurs brins, eux-mêmes constitués d'une multitude de filaments.

Longueur maximale de la zone résistive

Une zone résistive suffisamment petite peut se résorber d'elle-même, en se refroidissant par conduction ; on détermine ici l'ordre de grandeur de la longueur maximale d'une zone capable de se résorber elle-même, L_{\max} .



La figure ci-contre précise les notations ; la zone sombre est à l'état normal (résistif), le reste du milieu est supraconducteur. Les données numériques sont : $T_0 = 4 \text{ K}$, $T_c = 6 \text{ K}$, $J = 10^9 \text{ A.m}^{-2}$; la résistivité du matériau à l'état normal est $\rho_n = 4 \times 10^{-7} \Omega.m$, sa conductivité thermique est $k = 0,3 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; ces deux dernières grandeurs sont réputées ne pas

dépendre de la température.

□ 15 – En supposant que les échanges thermiques se font uniquement par conduction le long de l'axe du cylindre parcouru par le courant de densité J , montrer que

$$L_{\max} = \sqrt{\frac{2k(T_c - T_0)}{\rho_n J^2}} \text{ et calculer sa valeur.}$$

Maintien mécanique des conducteurs exposés à une induction magnétique

Un supraconducteur cylindrique, parcouru par un courant de densité volumique J_z , exposé à une induction B_y , se déplace parallèlement à la direction x .

□ 16 – En considérant une portion de conducteur comme un système adiabatique soumis à la force de Laplace, exprimer l'énergie apportée dans cette portion à l'occasion du mouvement et en déduire son élévation de température.

□ 17 – Calculer l'élévation de température associée à un déplacement de $3 \mu\text{m}$ dans une induction de 5 T ($J = 10^9 \text{ A.m}^{-2}$ et $c = 5000 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$).

Contraintes thermiques lors d'une transition

Lors d'une transition, la densité de puissance dissipée est telle que l'on peut négliger les échanges thermiques entre le conducteur et le milieu extérieur. Pour un cylindre de volume $S \times l$, le bilan thermique s'écrit en effet, dans le cas de transition par dépassement de la densité de courant critique : énergie thermique emmagasinée = énergie dissipée par effet joule.

□ 18 – Exprimer en fonction de ρ , J_c et c le taux de variation de la température au moment de la transition, $\tau = \left(\frac{dT}{dt} \right)_{\text{transition}}$ et calculer sa valeur numérique (on la trouvera énorme !) pour $\rho_n = 4 \times 10^{-7} \Omega.m$, $J_c = 2 \times 10^9 \text{ A.m}^{-2}$ et $c = 5000 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$.

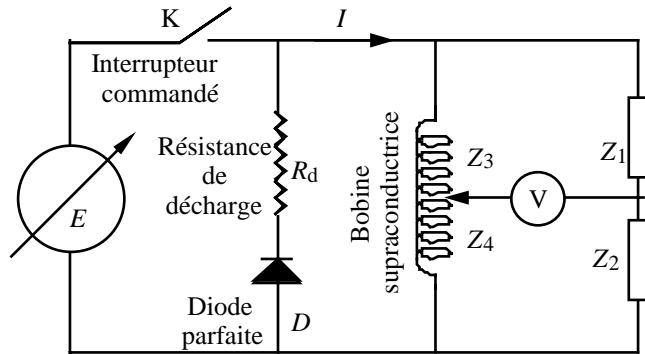
Pour prévenir la catastrophe associée à cet éventuel emballement, on noie les filaments supraconducteurs dans une matrice de cuivre (Cu), de résistivité bien plus faible. Soient β la fraction volumique de supraconducteur et $(1 - \beta)$ celle du cuivre, ρ_{Cu} et c_{Cu} respectivement la résistivité et la capacité calorifique volumique du cuivre à basse température.

□ 19 – Supposant que le cuivre et le supraconducteur sont à chaque instant à la même température, donner la nouvelle expression de τ , dérivée temporelle de la température au moment de la transition.

□ 20 – Calculer τ pour $\rho_n = 4 \times 10^{-7} \Omega.m$, $\rho_{\text{Cu}} = 2 \times 10^{-10} \Omega.m$, $c_{\text{Cu}} = 1000 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$, c

$= 5000 \text{ J.m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$ et $\beta = 0,7$.

Environnement électrique et circuit de protection d'une bobine supraconductrice



Une bobine supraconductrice transite rarement dans son intégralité, seules une ou plusieurs zones normales apparaissent. Par effet Joule et conduction thermique, elles se propagent à travers le bobinage. Le schéma ci-contre représente un détecteur de transition ; une valeur positive de E permet d'établir un courant positif dans la bobine ; dès que la valeur désirée du courant est atteinte, E est annulé. L'ouverture de l'interrupteur isole la partie gauche du circuit. Lorsque la bobine est entièrement dans l'état supraconducteur, le pont de Wheatstone est équilibré : $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$.

L'ouverture de l'interrupteur isole la partie gauche du circuit. Lorsque la bobine est entièrement dans l'état supraconducteur, le pont de Wheatstone est équilibré : $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$.

□ 21 – Expliquer en quoi ce dispositif permet de détecter une transition ; justifier au passage la présence de la diode D .

Dimensionnement de la résistance de décharge

□ 22 – Parcourue par le courant I_c , la bobine transite au temps pris comme origine. Effectuer un bilan énergétique du processus, en négligeant l'énergie dissipée par effet joule dans la bobine devant celle qui est dissipée dans la résistance de décharge R_d . On introduira l'inductance L de la bobine, et on supposera que les grandeurs introduites dans le traitement ne dépendent pas de la température. Le résultat exprimera l'intégrale $\int_0^\infty I^2(t) dt$ en fonction de L, I_c, R_d et la section globale du conducteur, S .

□ 23 – Calculer la valeur numérique de la tension initiale aux bornes de la résistance pour $S = 4 \text{ mm}^2, R_d = 10 \Omega$ et $J_c = 10^9 \text{ A.m}^{-2}$

□ 24 – Ce traitement vous semble-t-il raisonnable ?

**FIN DU PROBLÈME
FIN DE L'ÉPREUVE**

Formulaire

Électromagnétisme (notations standard pour un conducteur ohmique)

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= 0 & \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{E} &= \rho \mathbf{j} \quad (\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}) & \text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 & \mathbf{B} &= \text{rot}(\mathbf{A}) & \mathbf{E} &= -\text{grad}(V) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

Identité vectorielle

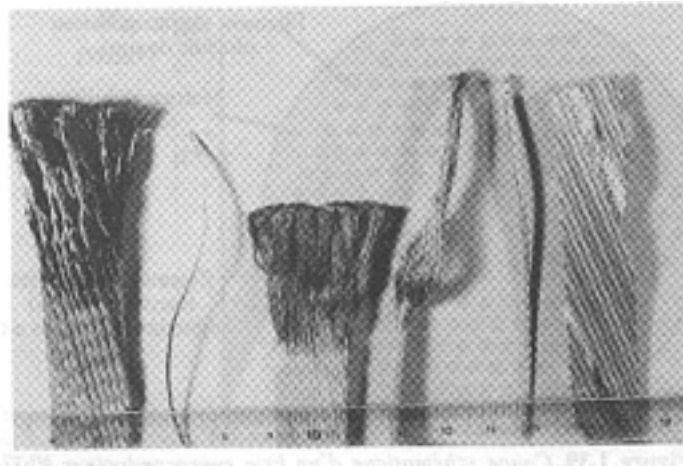
$$\mathbf{rot}[\mathbf{rot}(\mathbf{V})] = \mathbf{grad}[\mathbf{div}(\mathbf{V})] - \Delta \mathbf{V}$$

Coordonnées cylindriques

$$\mathbf{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{div}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{A}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{z}}$$



« Les conducteurs supraconducteurs sont composés de plusieurs brins, eux-mêmes constitués d'une multitude de filaments » (bas de la page 4).