

## A 99 PHYS. II

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,  
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,  
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,  
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,  
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1999

### SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filières PC

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

#### Sujet mis à disposition du concours ENTPE

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

*PHYSIQUE II -PC*

*L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 5 pages.*

*En fin d'énoncé, on rappelle les notations utilisées dans ce problème*

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.

- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : vecteur :  $\mathbf{V}$  (gras) ; norme du vecteur  $\mathbf{V}$  :  $V$  (italique) ; vecteur unitaire :  $\hat{\mathbf{v}}$ .

## Cuisson d'un soufflé

Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes entre elles.

On se propose d'étudier la diffusion de l'énergie thermique au sein d'une plaque homogène d'épaisseur  $d$ , placée dans un four aux parois métalliques maintenues à la température  $T_c$ . La figure 1 précise la configuration et les notations. Les plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont de très grandes dimensions devant  $d$ . La température initiale de la plaque, notée  $T_i$ , est uniforme. Jusqu'à la question 7, les seuls transferts envisagés sont les transferts thermiques.

A la date  $t$ , un point de la plaque est à la température  $T$ . On appellera  $T_1$  la température de la plaque à la surface  $\Pi_1$ . En dépit des discontinuités du milieu (interfaces paroi-plaque et plaque-air), la température est supposée être une fonction deux fois dérivable de l'espace.

### A) Équilibre de l'ensemble.

□ 1 – Comment justifier le modèle où, en régime stationnaire, la température  $T_p$  dans la plaque et  $T_a$  dans l'air sont uniformes.

□ 2 – Donner le nom de la transformation décrivant l'évolution de l'ensemble {plaque et air}.

□ 3 – Expliquer pourquoi la pression de l'air dans le four ne peut pas être constante au cours de l'évolution et en déduire les hypothèses de l'énoncé qui vous paraissent, en conséquence, les plus suspectes.

□ 4 – Quelles sont les relations entre températures  $T_e$ ,  $T_p$  et  $T_a$  à l'équilibre ?

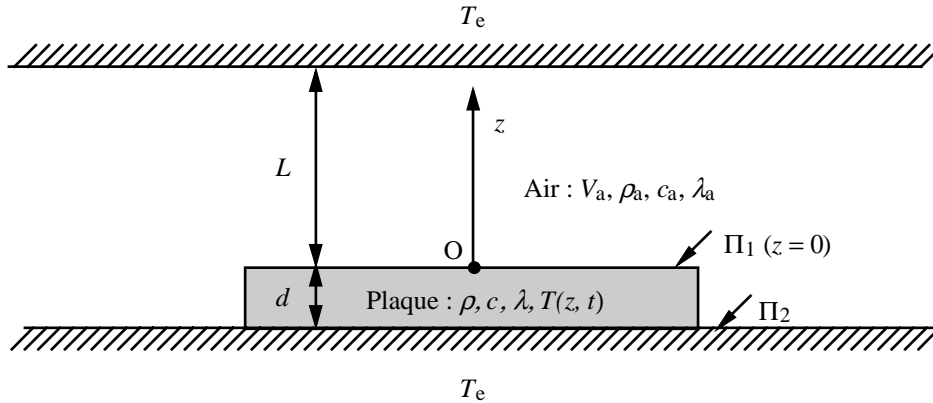


Fig. 1 : Plaque dans un four

Le matériau de la plaque a une masse volumique  $\rho$ , une capacité thermique massique  $c$  et une conductivité thermique  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ). Ces trois grandeurs sont constantes. L'air au dessus de la plaque occupe le volume  $V_a$  constant ; sa masse volumique est  $\rho_a$ , sa capacité thermique massique est  $c_a$  et sa conductivité thermique est  $\lambda_a$ . On considérera  $\rho_a$ ,  $c_a$  et  $\lambda_a$  comme constantes. Le plan  $\Pi_2$  est en contact avec la paroi inférieure du four. Le plan  $\Pi_1$  est à la distance  $L$  de la paroi supérieure du four.

### Établissement de la température dans la plaque.

□ 5 – Justifier d'après les hypothèses que  $\theta = T - T_e$  puisse ne dépendre que de  $z$  et de  $t$ . On supposera qu'il en est effectivement ainsi.

□ 6 – Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$  :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a^2 \Delta \theta = 0.$$

Donner l'expression de  $a$  en fonction de  $\rho$ ,  $c$  et  $\lambda$ .

□ 7 – On cherche une solution de cette équation de la forme  $\theta = f(z).g(t)$ . Établir les équations différentielles vérifiées respectivement par  $f(z)$  et  $g(t)$ . On introduira une constante supplémentaire  $\nu$ , homogène à l'inverse d'un temps.

□ 8 – Déterminer le signe de  $\nu$  de telle manière que  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ . Posant  $\nu = -k^2$ , donner l'expression de  $g(t)$ . Pourquoi rejeter l'autre solution ?

□ 9 – Déterminer l'expression de  $\theta$  sous la forme :  $\theta_k = (A_k \cos \alpha z + B_k \sin \alpha z) \exp \alpha' t$ , qui sera provisoirement acceptée. Donner l'expression de  $\alpha$  et celle de  $\alpha'$  en fonction de  $a$  et  $k$ . Les constantes  $A_k$  et  $B_k$  seront déterminées par la suite. Déterminer l'expression des flux surfaciques de puissance  $\mathbf{J}_Q(\Pi_1)$  à travers  $\Pi_1$  et  $\mathbf{J}_Q(\Pi_2)$  à travers  $\Pi_2$  ( $\alpha$  et  $\alpha'$  ayant été exprimés en fonction de  $a$  et  $k$ ).

**B) Étude des conditions aux limites imposées aux niveaux de  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ .**

On s'intéresse d'abord au plan  $\Pi_1$ .

□ 10 – *Première situation* : on néglige tout mouvement de l'air au dessus de la plaque. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la température  $T_a(z, t)$  ; déterminer  $T_a(z, t)$  en supposant que l'évolution de la température de la plaque au niveau du plan  $\Pi_1$  est suffisamment lente pour que l'on puisse envisager de négliger le terme dépendant du temps dans l'équation locale pour  $T_a$ . En déduire le flux de puissance  $\mathbf{J}_{Q_1}(\Pi_1)$  à travers  $\Pi_1$  en fonction de  $\lambda_a, L, T_e$  et  $T_1$ .

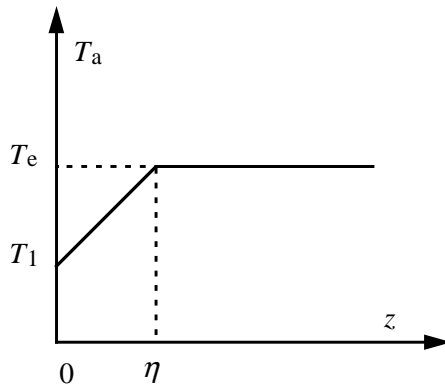


Fig. 2 : profil de température de l'air dans le cas de brassage forcé ; le plan  $\Pi_1$  correspond à  $z = 0$ .

□ 11 – *Seconde situation* : l'air est brassé (brassage forcé) au dessus de la plaque. La distribution de la température  $T_a$  est alors modélisée comme indiqué à la fig. 2 ;  $\eta$  est de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre. On considère que le transfert thermique est uniquement conductif au voisinage de  $\Pi_1$  (ce qui revient à considérer que la vitesse de l'air est très faible sur l'épaisseur  $\eta$ ). Déterminer  $T_a(z, t)$  en fonction de  $T_e, T_1$  et  $\eta$ , puis le flux de puissance  $\mathbf{J}_{Q_2}(\Pi_1)$  à travers  $\Pi_1$  en fonction de  $\lambda_a, \eta, T_e$  et  $T_1$ .

□ 12 – Comparer  $\mathbf{J}_{Q_1}(\Pi_1)$  à  $\mathbf{J}_{Q_2}(\Pi_1)$ .

- Quel est l'intérêt d'un four disposant d'un ventilateur pour brasser l'air ?
- Pour refroidir un biberon, a-t-on intérêt à le plonger dans l'eau froide ou à le mettre dans un courant d'eau froide ?
- Pourquoi est-il thermodynamiquement convenable de souffler sur sa cuillère de soupe trop chaude pour la refroidir (remarquer que cette situation fait intervenir un changement d'état) ?

Le flux de puissance à travers la partie supérieure de la plaque (plan  $\Pi_1$ ), comme on l'a montré dans les deux situations envisagées aux questions 10, 11 et 12, sera écrit sous la forme générale  $\mathbf{J}_{Q_a} = -h(T_e - T_1)\hat{\mathbf{z}}$  avec  $h > 0$  (l'indice « a » se rapporte à l'air).

□ 13 – Quel est le sens physique de l'égalité entre  $\mathbf{J}_Q(\Pi_1)$  et  $\mathbf{J}_{Q_a}$  ? en déduire la relation entre  $A_k$  et  $B_k$  et donner l'expression de  $\theta_k$  en fonction de  $A_k$  seul (et bien sûr de  $a, k$  et  $\lambda$ ).

□ 14 – Déduire de la condition imposée à  $T$  au niveau du plan  $\Pi_2$  la relation entre  $k, d, a, \lambda$  et  $h$ .



On veut essayer d'utiliser certains des résultats précédents pour optimiser la cuisson d'un soufflé au fromage, préparation culinaire à base de blanc d'œuf battus en neige. On incorpore à ces derniers un mélange constitué d'une sauce épaisse au fromage (béchamel) et de jaunes d'œuf. Le volume d'un blanc d'œuf standard est environ  $30 \text{ cm}^3$  ; lorsqu'il est agité (battu en neige) le blanc d'œuf piège des bulles d'air et son volume devient environ  $300 \text{ cm}^3$ . La préparation est placée dans un récipient cylindrique et mise au four à  $180^\circ\text{C}$ . Des mesures effectuées au cours de la cuisson montrent que la pression dans la préparation varie très peu. La cuisson est terminée quand la température au centre de la préparation est de l'ordre de  $80^\circ\text{C}$ . Les températures à la surface et au fond sont alors légèrement supérieures à  $100^\circ\text{C}$  ; le volume initial a triplé.

*Hypothèses et données* : la diffusion des gaz se fait plus rapidement que la cuisson (c'est-à-dire que l'augmentation de la viscosité). On ne tiendra pas compte de la capillarité, des contraintes tangentielles en surface et sur les bords du soufflé (déchirures, débordements). La densité moyenne approximative de la préparation culinaire est  $d_m \approx 1$ , la constante des gaz parfaits est  $R \approx 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$  et la masse molaire de l'eau est  $M_{\text{H}_2\text{O}} \approx 18 \text{ g.mol}^{-1}$ .

□ 25 – Peut-on expliquer l'augmentation de volume par la dilatation de l'air (assimilé au gaz parfait) contenue dans le blanc d'œuf ? si non, quel autre phénomène faut-il envisager ? où se produit-il principalement ?

□ 26 – Quelle est la masse d'eau minimale vaporisée pour un litre de préparation ?

□ 27 – On constate que la préparation perd 10% de sa masse au cours de la cuisson. Pour quelle raison principalement ? Évaluer cette masse ; comparer avec le résultat trouvé en 26. Conclure.

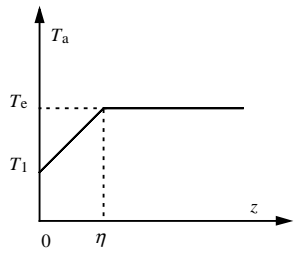
□ 28 – On veut que le soufflé soit très gonflé tout en ne se desséchant pas à l'intérieur. On envisage donc d'obtenir très rapidement la formation d'une croûte à la surface rendant celle-ci imperméable à la vapeur d'eau, évitant ainsi la perte d'eau. A-t-on intérêt à utiliser un four à air pulsé ? motiver la réponse. Que pensez-vous de la solution consistant à utiliser un chalumeau pour obtenir cette croûte avant la cuisson ? comment régler la cuisson après cette première étape : type de fonctionnement (air brassé, ou pas), réglage de la température ?

## FIN DU PROBLÈME FIN DE L'ÉPREUVE

*Note* : Les considérations faisant l'objet de ce problème, ainsi que beaucoup d'autres, ont été vérifiées expérimentalement, notamment par Kurti et This, lors du premier colloque international de gastronomie moléculaire et physique, à Erice (Sicile), en 1992.



## Quelques notations utilisées dans ce problème

$c$	capacité thermique massique du matériau de la plaque
$c_a$	capacité thermique massique volumique de l'air au-dessus de la plaque
$\lambda$	conductivité thermique du matériau de la plaque $\lambda$
$d$	épaisseur de plaque
$\mathbf{J}_Q(\Pi_1)$	flux surfacique de puissance à travers $\Pi_1$
$\mathbf{J}_Q(\Pi_2)$	flux surfacique de puissance à travers $\Pi_2$
$L$	distance entre le plan $\Pi_1$ et la paroi supérieure du four.
$T$	température de la plaque à la date $t$
$T_1$	température de la plaque à la surface $\Pi_1$ .
$T_a$	température de l'air en régime stationnaire
$T_e$	température des parois du four
$T_i$	température initiale de la plaque
$T_p$	température de la plaque en régime stationnaire
$V_a$	volume de l'air au-dessus de la plaque
$\rho$	masse volumique du matériau de la plaque
$\theta$	$\theta = T - T_e$
$\eta$	
$\lambda_a$ la plaque	conductivité thermique de l'air au-dessus de
$\rho_a$	masse volumique de l'air au-dessus de la plaque sa capacité thermique massique