

A 00 PHYS. II

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2000

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3heures ; l'emploi de la calculatrice est autorisé)

Sujet mis à disposition des concours ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II -MP

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 6 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

L'énoncé de cette épreuve comporte deux problèmes totalement indépendants.

Premier problème

L'EXTINCTION DES DINOSAURES

*Les données numériques nécessaires à la résolution du problème sont présentées au fur et à mesure de l'exposé des questions ; la lecture de la **totalité** des questions qui précèdent est donc nécessaire à la résolution de chacune des questions posées. Cependant, de nombreuses questions sont **indépendantes** les unes des autres : il est possible de répondre à certaines questions sans avoir nécessairement résolu toutes celles qui les précèdent.*

Il y a de cela environ 65 millions d'années, les dinosaures et de nombreuses autres espèces vivantes, terrestres et aquatiques, animales et végétales, ont été victimes d'une extinction massive et brutale (événement K/T, à la limite des périodes crétacée (K) et tertiaire (T)). Parmi les diverses hypothèses proposées, celle qui recueille à l'heure actuelle le plus de suffrages dans la communauté scientifique est celle de l'impact d'une comète à la surface de la Terre. Ce problème examine quelques-uns des aspects de la description mécanique et énergétique d'un tel impact.

Première partie – Les mouvements cométaires

Un ensemble d'astéroïdes de faible dimension se trouve vraisemblablement réparti, dans le système solaire, à grande distance du Soleil (au-delà de l'orbite de Pluton). La masse totale de ces astéroïdes (*nuage de Oort*) représente environ le tiers de la masse totale des neuf planètes et de leurs satellites. Lorsqu'un de ces astéroïdes est suffisamment dévié de sa trajectoire quasi-circulaire par l'effet gravitationnel d'autres astéroïdes et planètes pour s'approcher à très courte distance du Soleil, il prend le nom de *comète*.

Nous étudions ici les caractéristiques du mouvement d'une comète hypothétique, qui pourrait, à certains égards, ressembler à celle qui fut peut-être responsable de l'événement K/T.

Comète - Guidage

Cette comète C , de masse $m = 2,5 \cdot 10^{15}$ kg, est considérée comme sphérique, de rayon $r_c = 10^4$ m ; sa trajectoire autour du Soleil est une ellipse très allongée.

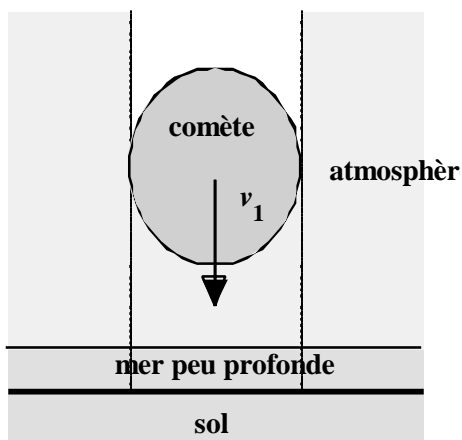
La comète C est aussi caractérisée par une distance maximale au Soleil $d_{\max} = 5 \cdot 10^4 a$, où $a = 1,5 \cdot 10^{11}$ m est le rayon de la trajectoire (supposée circulaire) terrestre autour du Soleil (a est appelé *unité astronomique*). Elle est enfin caractérisée par une période de mouvement notée T . On note T_0 la période du mouvement terrestre autour du Soleil.

1. Déterminer numériquement la vitesse v_0 de la Terre sur son orbite circulaire autour du Soleil.
2. On note G la constante de la gravitation universelle et M_S la masse du Soleil. Exprimer le produit $G M_S$ en fonction de v_0 et a .
3. La distance minimale de C au Soleil est notée d_{\min} . Exprimer, en fonction de d_{\max} , d_{\min} , a et v_0 , les vitesses maximale v_{\max} et minimale v_{\min} de C sur son orbite. On pourra utiliser des relations de conservation.
4. Quelle relation doivent vérifier d_{\min} et a pour qu'un impact de C sur la surface de la Terre puisse être envisagé ?
En déduire une évaluation numérique de la plus petite valeur possible pour v_{\max} .
5. On choisira dans la suite $d_{\min} \cong a$. Quelles sont les valeurs extrêmes possibles de la vitesse relative de la Terre et de C (vitesse d'impact) au moment du choc de C sur la Terre ?

Deuxième partie – L'impact

L'hypothèse d'un impact de comète a été avancée pour la première fois à la suite de la mise en évidence d'une couche, déposée sur toute la surface de la Terre (considérée comme une sphère de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m) de quelques millimètres d'épaisseur, contenant de l'Iridium (métal lourd et non radioactif) en proportion anormale. La couche (dite K/T) ainsi mise en évidence est actuellement enfouie sous des sédiments plus récents. Elle contient une masse totale d'Iridium estimée à $5 \cdot 10^8$ kg. La proportion usuelle d'Iridium en masse dans la croûte terrestre est de l'ordre de 10^{-10} .

6. Par quelle(s) méthode(s), peut-on, à votre avis, déterminer des proportions aussi faibles que celles qui sont citées ci-dessus ?
7. La masse volumique moyenne de la terre est $\rho_T = 5,5 \cdot 10^3$ kg.m⁻³. Comparer les proportions d'Iridium dans la couche K/T et dans le reste de la croûte terrestre. Conclure, sachant que la proportion d'Iridium en masse dans les astéroïdes et les comètes est quelques dizaines à quelques centaines de fois plus élevée que dans la croûte terrestre.



Au moment de l'impact, nous considérerons que la trajectoire de la comète C parvient sur la Terre selon une trajectoire verticale, avec une vitesse (relativement au sol terrestre) égale à $v_1 = 2 \cdot 10^4$ m.s⁻¹, qui reste pratiquement constante pendant la traversée de l'atmosphère, au-dessus de la mer où l'impact a eu lieu.

Lors de sa descente dans l'atmosphère, la comète expulse la totalité de l'atmosphère dans une colonne cylindrique de rayon r_c .

8. Déterminer la masse de cette colonne d'air, sur la hauteur totale de l'atmosphère. La pression atmosphérique

au sol est $P_0 = 10^5$ Pa et l'accélération de la pesanteur au sol est $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. La hauteur totale de l'atmosphère, h , est de l'ordre de la centaine de kilomètres ($h \approx 6 \times 10^4$ m). On considérera que l'intensité et la direction du champ de pesanteur sont constants sur cette distance.

9. La variation relative de la vitesse de la comète à l'issue de sa traversée de l'atmosphère est inférieure de 1 % à ce qu'elle serait en l'absence d'atmosphère. Comparer la variation de l'énergie cinétique de la comète, lors de cette même traversée, et la variation de son énergie potentielle de pesanteur.
En déduire, en considérant le transfert d'énergie de la comète à l'air expulsé au cours de sa descente, que la vitesse des molécules d'air au moment où elles quittent cette colonne cylindrique est de l'ordre de grandeur de v_1 .
10. En déduire l'énergie cinétique communiquée par la comète à l'atmosphère ; comparer à l'énergie cinétique initiale de la comète. Conclure.

La partie de la mer peu profonde (profondeur de l'ordre de 100 m) située sur la trajectoire de la comète est instantanément vaporisée et expulsée par la traversée de la comète.

11. La masse volumique de l'eau liquide est $\rho_0 = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; l'enthalpie de vaporisation massique de l'eau est $L_v = 2,3 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$. Déterminer l'énergie communiquée par la comète à l'océan ; comparer à l'énergie cinétique initiale de la comète. Conclure.

Troisième partie – Les retombées de l'impact

On considère qu'après l'impact, environ 90 % de l'énergie cinétique de la comète sont convertis en émission de projectiles divers. Après être remontés à travers la colonne de vide créée par la chute de la comète, ces projectiles se répartissent de façon quasi-uniforme sur toute la surface de la haute atmosphère, à une altitude de l'ordre de $h = 6 \cdot 10^4$ m. La combustion de ces projectiles lors de leur retombée convertit la totalité de l'énergie cinétique en énergie thermique. La durée totale de la combustion est estimée à une heure.

12. Déterminer la puissance totale ainsi rayonnée par la haute atmosphère, et la puissance par unité de surface f correspondante.
13. On souhaite comparer cette puissance f au flux solaire moyen f_s . Pour déterminer celui-ci, on assimilera le Soleil à un corps noir sphérique de rayon $R_s = 7 \cdot 10^8$ m, dont la température de surface est de l'ordre de $T_s = 5,7 \cdot 10^3$ K.
Déterminer le flux solaire moyen f_s reçu à la surface de la haute atmosphère terrestre, à la distance a du Soleil. On rappelle la valeur de la constante de Stefan, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$.
Comparer f et f_s . Conclure.
14. Comparer encore la puissance totale due à la combustion et la puissance (que vous estimerez) correspondant à un réacteur (une tranche) de centrale nucléaire de production d'électricité.
Conclure à nouveau.
15. La température d'équilibre T_e à la surface du sol (en négligeant le rayonnement solaire, obscurci par les retombées de l'impact) peut être évaluée par la relation $T_e \approx \left(\frac{f}{2s} \right)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{h}{2R_T} \right)$.
Justifier cette relation. Évaluer T_e ; conclure.

FIN DE CE PROBLÈME

Second problème

ONDES GUIDÉES EN SURFACE

*Les ondes électromagnétiques sont susceptibles de se propager dans divers milieux. Ce problème présente une étude du phénomène de **guidage** d'ondes électromagnétiques entre deux plans ; cependant, il ne s'agit pas ici de plans métalliques, mais de plans de **discontinuité** des propriétés électriques des matériaux utilisés.*

Les vecteurs seront notés par des caractères gras (exemple : \mathbf{E}). Les vecteurs unitaires du système d'axes orthonormé ($Oxyz$) seront notés \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y et \mathbf{u}_z .

On rappelle les valeurs numériques de la célérité de la lumière dans le vide $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ et de la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

On rappelle aussi que $\text{rot rot } \mathbf{U} = \text{grad div } \mathbf{U} - \Delta \mathbf{U}$, pour toute fonction vectorielle \mathbf{U} .

Première partie – Milieux conducteurs

Nous étudions dans cette partie un milieu décrit par les équations de Maxwell relatives au vide, caractérisé par la densité volumique de courant \mathbf{j} et par une densité volumique de charge nulle : $\mathbf{r} = 0$.

16. Expliquer en quoi est généralement fautive l'affirmation « *Ce milieu ne comporte pas de charges, donc le courant électrique y est nécessairement nul* ».
17. Écrire les équations de Maxwell vérifiées par le champ électromagnétique (\mathbf{E} , \mathbf{B}) dans ce milieu.

Le milieu étudié sera provisoirement considéré comme un milieu conducteur ohmique, de conductivité \mathbf{g} . Les champs étudiés (\mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{j}) sont harmoniques de pulsation ω .

18. Quelle approximation classique peut-on faire dans les équations de Maxwell, pour les bons conducteurs ? On discutera des limites en fréquence de cette approximation dans le cas du *cui-vre* ($\mathbf{g} = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$) et du *silicium* ($\mathbf{g} = 3 \times 10^4 \text{ S.m}^{-1}$). Conclure, sachant qu'on limitera la suite de l'étude à des ondes de fréquence inférieure à 1GHz.
19. Déterminer, pour un bon conducteur, l'équation vérifiée par le champ électrique \mathbf{E} seul ; on l'écrira en fonction de la grandeur $\mathbf{d} = \sqrt{\frac{2}{m_0 \mathbf{g} \omega}}$.

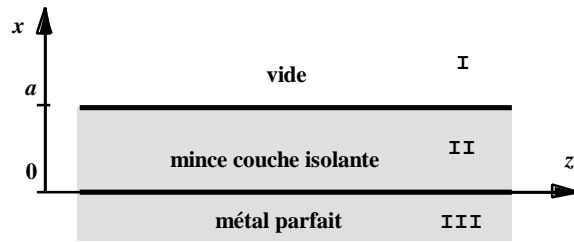
20. Montrer que, dans un milieu bon conducteur occupant l'espace $x > 0$, invariant par translation dans le plan (Oyz), un champ électrique de la forme :

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \frac{x}{\mathbf{d}} \right) \right] \exp \left(-\frac{x}{\mathbf{d}} \right)$$

est la seule solution des équations de Maxwell compatible avec la géométrie du problème. Commenter ; conclure, numériquement, dans le cas du *cui-vre* à 1MHz.

21. Qu'appelle-t-on *approximation des conducteurs parfaits* ?

Seconde partie – Ondes de surface



L'espace contient trois régions distinctes (cf. figure) ; la région I ($x > a > 0$) est vide ; la région II ($0 < x < a$) est constituée d'une mince couche de milieu isolant, et la région III ($x < 0$) est constituée d'un métal parfait).

Dans le métal, le champ électromagnétique est nul. Dans le vide, les densités volumiques de charge ρ et de courant \mathbf{j} sont nulles. On **admet** que, dans la région isolante, le champ électromagnétique vérifie

les équations de Maxwell modifiées :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \epsilon_r \mu_0 \mathbf{e}_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

où la *permittivité relative* du diélectrique ϵ_r est un nombre réel supérieur à 1.

On étudie la propagation dans ces trois régions de l'espace d'une onde électromagnétique dont le champ magnétique, porté par le vecteur unitaire \mathbf{u}_y s'écrit $\mathbf{B} = B_0(x) \mathbf{u}_y \exp[i(\omega t - kz)]$

et l'on cherche le champ électrique sous la forme $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x) \exp[i(\omega t - kz)]$

Les constantes ω et k ont la même valeur réelle positive dans les trois milieux, tandis que la fonction $B_0(x)$ et les trois composantes $E_{0x}(x)$, $E_{0y}(x)$, $E_{0z}(x)$ de $\mathbf{E}_0(x)$ sont des fonctions de x seulement, avec des expressions différentes dans les trois milieux I, II et III.

22. Exprimer les diverses composantes de $\mathbf{E}_0(x)$ en fonction de ω , k , $B_0(x)$ et de ses dérivées, et des constantes qui caractérisent le problème, dans la région II.
En déduire les relations analogues s'appliquant dans la région I.
23. Déterminer, dans les régions I et II, les équations différentielles vérifiées par la fonction $B_0(x)$.
24. On cherche une solution des équations de Maxwell (dite *onde guidée en surface*) telle que l'amplitude du champ magnétique est une fonction *exponentielle réelle* de x dans le milieu I et une fonction *sinusoïdale* de x dans le milieu II. On notera ces fonctions $B_I \exp(-\mathbf{a}x)$ et $B_{II} \cos(\mathbf{b}x + \mathbf{f})$ respectivement. À quelle condition (portant sur k , ω , c et ϵ_r) une telle onde existe-t-elle ? Déterminer alors \mathbf{a} et \mathbf{b} et montrer la relation (R1) :

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_r - 1) \quad (\text{R1})$$

25. Expliquer l'analogie et les différences entre le dispositif présenté ici et les *guides d'ondes* à parois métalliques étudiés dans le cadre du cours.

Troisième partie – Relations de passage et modes du guide d'ondes

À la surface de séparation de deux milieux matériels (vide, métal parfait ou isolant), on admettra que les relations de passage du champ électromagnétique sont les mêmes que celles qui sont étudiées dans

le cadre du cours pour ce qui concerne les deux composantes (normale et tangentielle) du champ magnétique et la seule composante tangentielle du champ électrique.

En revanche, la relation relative à la composante normale du champ électrique ne se généralise pas ici.

On n'étudiera donc pas l'éventuelle discontinuité de cette composante normale dans la suite.

D'une façon générale, l'écriture des relations de passage aura pour but de relier les expressions des champs de part et d'autre des surfaces $x = 0$ et $x = a$; on ne cherchera pas à déterminer les expressions des éventuelles densités surfaciques de charge ou de courant.

26. Expliquer pourquoi la fonction $B_0(x)$ est continue de part et d'autre de la surface $x = a$.
27. Exprimer une relation de passage à la surface $x = 0$ permettant d'obtenir la valeur de f .
28. Exprimer de même des relations de passage à la surface $x = a$.
29. Montrer qu'il n'existe pas de solution de la forme demandée (*onde de surface*) pour certaines valeurs de $(\mathbf{b}\omega)$. On supposera bien sûr dans la suite que la solution cherchée existe.
30. Établir la relation (R2) : $\mathbf{b}\tan(\mathbf{b}\omega) = \mathbf{e}_{\omega,a}$.
31. Pour résoudre le système d'équations formé de (R1) [question (24)] et (R2), on pourra utiliser une méthode graphique, en posant $X = \mathbf{b}\omega$ et $Y = \mathbf{a}\omega$.
Il n'est pas nécessaire de disposer d'une calculette graphique, ni même d'une calculette très performante, pour venir à bout des calculs numériques nécessaires, qui sont simples.
Montrer que les solutions de ces équations sont en nombre fini, ce nombre dépendant de la pulsation ω . On pourra remarquer que les zéros de la fonction $X \rightarrow X \tan(X)$ sont les mêmes que ceux de la fonction $X \rightarrow \tan(X)$.
32. Chaque solution porte le nom de *mode* du guide. Définir et déterminer la pulsation de coupure ω_n du mode numéro n . Expliquer l'analogie avec les modes d'un guide d'ondes à parois métalliques.

FIN DE CE PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE