ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1999

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à disposition du concours ENTPE

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II -MP

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : vecteur : **V** (gras) ; norme du vecteur **V** : *V* (italique) ; vecteur unitaire : $\hat{\mathbf{v}}$.

DYNAMIQUE DE FORMATION DES ÉTOILES

Une étoile est formée d'une certaine masse M_0 de gaz, qui adopte une configuration sphérique du fait de l'interaction gravitationnelle entre les atomes d'Hydrogène qui la composent. On négligera tout effet de rotation et on considérera qu'à tout instant cette masse de gaz est en équilibre hydrostatique, disposée dans le vide. À tout instant de la formation, les répartitions de masse volumique, de pression et de température dans l'étoile sont à symétrie sphérique. On notera G la constante de la gravitation universelle (ou constante de Cavendish) et on appellera R le rayon de l'étoile à un instant donné. Le rayon final sera noté R_0.

<u>*Données numériques*</u>

Constante de Cavendish	$G = 6.67\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-2}}$
Constante de Boltzmann	$k = 1{,}38\ 10^{-23}\mathrm{J.K^{-1}}$
Nombre d'Avogadro	$N_A = 6{,}02\ 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Masse de l'atome d'Hydrogène	$m = 1{,}67\ 10^{-27}$ kg

Masse du Soleil $M_0 = 1{,}99\ 10^{30}$kg

Rayon du Soleil $R_0 = 6{,}96\ 10^{8}$ m

Distance de la Terre au Soleil $D = 1{,}49\ 10^{11}$ m

Partie I : Structure hydrostatique de l'étoile

On appelle $\mu(r)$ la masse volumique de l'étoile à la distance r du centre et $M(r)$ la masse de la fraction de l'étoile qui est située à une distance de son centre inférieure ou égale à r. On appelle aussi $p(r)$ la pression qui règne à cette distance r du centre.

❑ **1** – Relier $\mu(r)$ et $M(r)$.

❑ **2** – Relier $M(r)$ et le champ de gravitation $\mathbf{g}(r)$ à la distance r du centre et à la constante G.

❑ **3** – Établir l'équation d'équilibre hydrostatique du gaz qui forme l'étoile, sous forme d'une équation différentielle liant $p(r)$ et $M(r)$ et leurs dérivées, la distance r et la constante G.

Pour les questions 4 et 5, on considère que l'hydrogène atomique constituant l'étoile est un fluide incompressible

❑ **4** – Établir l'expression de la pression p_C au centre C de l'étoile, en fonction de G, de la masse M_0 de l'étoile et de son rayon R_0. On supposera que la pression à la surface de l'étoile est nulle.

❑ **5** – Assimilant localement l'hydrogène au gaz parfait, déterminer la température T_C au centre C de l'étoile en fonction de G, M_0, R_0, de la constante de Boltzmann k et de la masse m de l'atome d'hydrogène. Application numérique : Calculer p_C et T_C dans le cas du Soleil.

Pour les questions 6 et 7, on considère que l'hydrogène atomique constituant l'étoile est un fluide quelconque.

On considère le modèle simple suivant de formation progressive de l'étoile : après accumulation de la masse $M(r)$ dans la sphère de centre C et de rayon r, une masse dM est apportée de façon quasi-statique depuis l'infini et disposée régulièrement sur une couche sphérique comprise entre les rayons r et r + dr.

❑ **6** – Calculer le travail fourni dans ce processus ; commenter son signe.

❑ **7** – Calculer, sous forme d'une intégrale portant sur la fonction $M(r)$, le travail, noté W_G, nécessaire à la formation de l'étoile. Justifier qu'on l'appelle *énergie gravitationnelle de l'étoile*.

Pour les questions 8, 9 et 10, on considère à nouveau que l'hydrogène atomique constituant l'étoile est un fluide incompressible

❑ **8** – Montrer que l'énergie gravitationnelle de l'étoile s'écrit alors $W_G = -\frac{3}{5}\frac{G M_0^2}{R_0}$.

❑ **9** – Comment pourrait-on retrouver le résultat de la question 8 ci-dessus par une analogie électrostatique ? Vérifier qu'on retrouve bien l'expression de W_G.

❑ **10** – Lors de sa phase de formation, le Soleil (supposé formé d'hydrogène incompressible) s'est contracté à partir d'une nébuleuse originelle de gaz de très grand rayon initial jusqu'à sa taille actuelle. Donner l'expression de l'énergie rayonnée par le Soleil pendant cette durée ; Effectuer l'application numérique pour la puissance moyenne correspondante en supposant la durée de contraction égale à 1 milliard d'années. Quelle est le flux énergétique correspondant (puissance par unité de surface) reçu au niveau du sol terrestre ?

Dans les parties II et III, on ne suppose plus incompressible le gaz qui constitue l'étoile.

Partie II : Détermination de l'énergie gravitationnelle

❑ **11** – Montrer que l'énergie gravitationnelle peut se mettre sous la forme de l'intégrale, étendue à tout le volume de l'étoile :

$$W_G = -3\iiint_{\text{étoile}} p\,\mathrm{d}\tau = -3\int_{r=0}^{R} p(r)\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r$$

❑ **12** – On admet que l'étoile est formée d'un gaz parfait en équilibre thermique. En déduire l'expression de W_G en fonction de la masse M de l'étoile, de sa température T, de la constante de Boltzmann k et de la masse m de l'atome d'hydrogène.

❑ **13** – Comparer au résultat des questions précédentes, liant, dans le cas d'un fluide incompressible, W_G à M, T_C, k et m.

Partie III : Théorème du Viriel

On souhaite ici retrouver le résultat de la question 12 par une autre méthode, éventuellement généralisable à d'autres natures d'interaction que la forme gravitationnelle. On considère pour cela un ensemble Σ borné dans l'espace de N particules, numérotées par l'indice i, de masses m_i, de vecteurs positions $\mathbf{r}_i$ relativement à un certain référentiel galiléen, de vecteurs vitesses $\mathbf{v}_i$ dans le même référentiel, soumises à des interactions potentielles décrites par la fonction énergie potentielle notée $E_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2,..., \mathbf{r}_N)$. On note E_c l'énergie cinétique totale du système.

❑ **14** – Montrer que l'énergie cinétique du système Σ se met sous la forme :

$$E_c = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i \cdot m_i\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t}$$

où Φ est une certaine fonction des N positions et des N vitesses, que l'on déterminera.

On s'intéressera dans la suite de cette partie aux valeurs moyennes (au cours du temps) de certaines grandeurs dynamiques ; appelle *moyenne temporelle* $\overline{f}$ d'une fonction du temps $f(t)$ la limite (si elle existe) :

$$\overline{f} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$$

❑ **15** – Montrer que Φ reste borné. En déduire l'expression de la moyenne de $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$.

❑ **16** – Exprimer la moyenne temporelle de l'énergie cinétique du système Σ, en fonction de la grandeur $w_i = \overline{\mathbf{r_i}.\mathbf{F_i}}$, où $\mathbf{F}_i$ désigne la force exercée sur la i-ème particule par l'ensemble des autres.

On considère maintenant que E_p est une fonction homogène de degré q de ses $3N$ variables que constituent les 3 coordonnées cartésiennes $\hat{\mathbf{v}}$, $y_i = \mathbf{r}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}$ et $z_i = \mathbf{r}_i \cdot \hat{\mathbf{z}}$ de chacune des N particules de Σ ; on rappelle que ceci signifie que, si chacune de ces coordonnées est multipliée par le même nombre réel λ, l'énergie potentielle est multipliée par λ^q.

❑ **17** – Déterminer la valeur de q dans le cas de l'interaction gravitationnelle. Quelle serait la valeur de q si l'interaction entre deux particules quelconques était de nature élastique ?

❑ **18** – On suppose ici que l'énergie potentielle qui décrit l'interaction entre les particules du système Σ est homogène de degré q. Montrer le *théorème du Viriel*, reliant les valeurs moyennes de E_c et de E_p en fonction de la seule constante q. On rappelle qu'une fonction U homogène de degré q par rapport à p variables x_1, x_2, … x_p vérifie le théorème d'Euler :

$$k\,U(x_1, x_2, \ldots x_p) = \sum_{i=1}^{i=p} x_i \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

❑ **19** – Appliquer ce théorème à une étoile dont les atomes sont en interaction gravitationnelle et retrouver ainsi les résultats de la question 12.

❑ **20** – Appliquer ce même théorème à l'ensemble de deux particules ponctuelles en interaction gravitationnelle et montrer qu'on peut retrouver ainsi la condition pour que leur trajectoire relative reste bornée.

❑ **21** – Appliquer ce même théorème à l'ensemble de deux particules ponctuelles en interaction élastique et commenter le résultat obtenu.

Partie IV : Une instabilité thermodynamique

❑ **22** – Déterminer la variation de température ΔT associée à un effondrement de l'étoile caractérisé par une variation de rayon ΔR (on pourra, éventuellement, utiliser les équations de la conservation de la masse, de l'équilibre hydrostatique ainsi que l'équation locale du gaz parfait).

❑ **23** – Exprimer la capacité thermique à volume constant de l'étoile.

On considère un système isolé de deux étoiles, dont le rayon est constant. On note U_i, S_i et T_i respectivement les énergies internes, entropies et températures de chaque élément de ce système isolé (i = 1, 2).

❑ **24** – Montrer que, à l'équilibre thermodynamique, $T_1 = T_2$, mais que le système est thermodynamiquement instable.

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE

Remarque sur un modèle : il peut sembler surprenant d'utiliser l'équation du gaz parfait quand les particules sont en interaction de manière assez importante, en l'occurrence l'interaction coulombienne ; un traitement quantique fait cependant aboutir à la conclusion que le gaz est d'autant plus parfait qu'il est dense.