

A 98 PHYS. II

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1998

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II - MP

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 6 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.

- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

-

Notations : vecteur $\rightarrow \mathbf{V}$ (gras) ; norme du vecteur $\mathbf{V} \rightarrow V$ (italique) ; vecteur unitaire $\rightarrow \hat{\mathbf{a}}$.

Conformément à l'usage, l'amplitude d'un champ électrique et l'énergie sont l'une et l'autre désignées par « E », le contexte exclut ici toute ambiguïté.

REFROIDISSEMENT D'ATOMES PAR ILLUMINATION LASER

La manipulation d'atomes par un ensemble de lasers accordés sur une transition atomique permet de ralentir ces atomes et d'obtenir ainsi des températures extrêmement basses : l'absorption de la lumière par les atomes produit une force analogue à un amortissement visqueux, qui ralentit très efficacement et très rapidement les atomes illuminés.

□ 1 – Dites ce que vous savez sur le prix Nobel de physique 1997.

1^{ère} Partie : pression de radiation résonante

En présence d'un champ électromagnétique monochromatique, de pulsation ω , dont le champ électrique est décrit par $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t = (E_0 \cos \omega t) \hat{\mathbf{x}}$ (cette forme sous-entend que le champ \mathbf{E} est spatialement uniforme dans toute la région d'étude), l'électron (masse m , charge électrique q) d'un atome monoélectronique de masse M est raisonnablement bien

Tournez s'il vous plaît

représenté par un oscillateur harmonique, dont l'équation du mouvement (« charge élastiquement liée ») est

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m} E_0 \cos \omega t \quad (\text{A})$$

La pulsation $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ est caractéristique de l'atome : on admettra que l'énergie de transition de l'électron dans l'atome est $E_i = E_2 - E_1 = \hbar\omega_0 = h\nu_0$, où E_2 et E_1 sont respectivement l'énergie du premier état excité et de l'état fondamental et où \hbar est une constante universelle, dite *constante de Planck* ($\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$), et qui a la dimension d'un moment cinétique. L'équation (A) implique aussi que l'on néglige tout phénomène magnétique dans la description du mouvement. On nomme respectivement γ *coefficient d'amortissement* et $\Delta = \omega - \omega_0$ l'*écart à la résonance* ; on suppose $|\Delta| \ll \omega_0$ et $\gamma \ll \omega_0$; on pose enfin la forme de la solution du régime forcé : $x = x_0 \cos(\omega t - \varphi)$.

□ 2 – Justifier que l'on néglige tout phénomène magnétique dans la description du mouvement et exprimer dans ces conditions x_0 et φ en fonction de $q, m, E_0, \omega_0, \Delta$ et γ .

Énergie absorbée

□ 3 – Expliquer pourquoi l'électron absorbe de l'énergie à chaque cycle du champ électrique et montrer que, en moyenne, l'énergie absorbée par unité de temps est

$$\langle P \rangle \approx \frac{q^2}{2m} \frac{\gamma}{4\Delta^2 + \gamma^2} E_0^2.$$

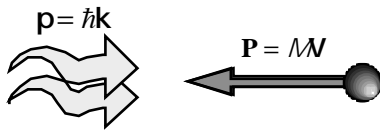


Fig. 1 : représentation particulière de l'interaction lumière-atome

Le champ électromagnétique est composé de particules, les *photons*, chaque photon possédant la quantité de mouvement $p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar \frac{\omega}{c} = \frac{h\nu}{c}$ et

l'énergie $\hbar\omega = h\nu$ (c est la célérité de la lumière dans le vide). Les lois de conservation gouvernant les échanges d'énergie et de quantité de mouvement lors

de l'interaction entre atome et photons entraînent que la vitesse d'un atome de masse M , absorbant un photon optiquement résonant ($\omega \approx \omega_0$) varie de $\delta V = \frac{h\nu}{Mc}$ ($\delta V \approx 10^{-2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$);

l'atome réémet un photon résonant, avec une direction aléatoire uniformément répartie dans l'espace. On se convainc aisément que le taux d'absorption de la lumière (par unité de temps) est $R = \frac{\langle P \rangle}{\hbar\omega}$. Comme le suggère la fig. 1, les processus d'absorption (et d'émission)

de lumière sont assimilables à des chocs inélastiques entre atome et photon. De ce point de vue, on pourra utiliser pour l'atome la mécanique newtonienne et admettre pour le photon les affirmations de l'énoncé.

□ 4 – Estimer l'ordre de grandeur de l'accélération ou de la décélération, a , de l'électron, en admettant que le cycle absorption-émission peut se répéter γ fois par seconde, avec $\gamma = 6,2 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$. Comparer a à l'accélération de la pesanteur $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$.

□ 5 – Estimer alors le temps d'arrêt d'un jet dont chacun des atomes serait animé de la vitesse thermique $V_{th} \approx 10^3 \text{ m.s}^{-1}$ ($V_{th} \gg \delta V$); estimer aussi la distance d'arrêt.

Force associée à l'absorption

□ 6 – L'intensité du rayonnement est $I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$, où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide. Établir la dimension de I .

□ 7 – Vérifier l'unité de R . Établir, en fonction de Δ, γ, I, k et de l'intensité de saturation $I_s = \frac{\epsilon_0 m c^2 \hbar \omega}{q^2}$, l'expression de la force moyenne exercée sur l'électron, due à

l'absorption quasi résonante de photons : $\langle \mathbf{F} \rangle = R \hbar \mathbf{k} = \frac{I/I_s}{1 + 4\Delta^2/\gamma^2} \hbar \gamma \mathbf{k}$ (c'est, on le voit, le taux de variation de la quantité de mouvement ; en réalité, cette expression n'est valable que pour $I < I_s \approx 10^3 \text{ W.m}^{-2}$). Préciser la direction de cette force ; que peut-on dire de la force qui s'exerce globalement sur l'atome ?

Application numérique

□ 8 – Calculer l'accélération subie par un atome de sodium, de masse atomique 23 g, dans les conditions suivantes : $\lambda = 589 \text{ nm}$, $\frac{I}{I_s} = 0,5$, $\gamma = 6,2 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ et $\Delta = \frac{\gamma}{2}$.

2ème Partie : refroidissement Döppler

Un atome sera dit *froid* si son mouvement devient lent, et donc si son oscillation dans le champ est amortie. Cet amortissement est possible si l'atome est soumis à une force dépendant de sa vitesse (on néglige ici le freinage par rayonnement de toute charge électrique accélérée). On suppose que toutes les grandeurs ne dépendent que de la seule variable d'espace x , et que, dans le repère du laboratoire, un champ électromagnétique de pulsation ω se propage dans la direction des x positifs. On admettra qu'un atome animé de la vitesse V colinéaire à l'axe $x'x$ dans le repère du laboratoire sera soumis dans son repère

propre à un champ de fréquence angulaire $\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}$ (effet Döppler).

Décalage Döppler

□ 9 – Montrer que, à l'ordre le plus bas, $\delta\omega_D = \omega' - \omega = -kV$. Adapter en conséquence l'expression de la force obtenue à la question 7. Que se passe-t-il si le laser agit continûment sur l'atome ?

Force dépendant de la vitesse

L'atome, animé de la vitesse V , est illuminé par deux faisceaux de même intensité et de même pulsation (fig. 2). On admet que l'interaction entre l'atome et l'un des faisceaux est indépendante de la présence de l'autre faisceau.

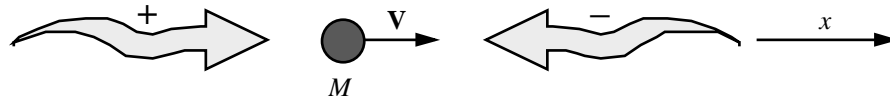


Fig. 2 : dans le repère du laboratoire, les deux faisceaux laser ne diffèrent que par leur sens de propagation

□ 10 – Faut-il opérer au dessus ou en dessous de la résonance (autrement dit, quel doit être le signe de Δ pour obtenir un amortissement du mouvement ?) Pour lequel des deux faisceaux laser la force radiative est-elle la plus importante ?

□ 11 – Établir l'expression de la force F qui agit sur l'atome et montrer que dans la limite des faibles vitesses (à préciser), on peut écrire $F = -\alpha V$. Exprimer α . Montrer que, pour $\Delta \approx \gamma$, le ralentissement est le plus efficace dans une gamme de vitesse de l'ordre de quelques mètres par seconde. Comparer cette vitesse à la vitesse thermique des atomes à la température ambiante T (énergie cinétique $\approx k_B T = 1,38 \times 10^{-23} T$, où k_B est la constante de Boltzmann et T la température thermodynamique). La figure 3 représente F graphiquement.

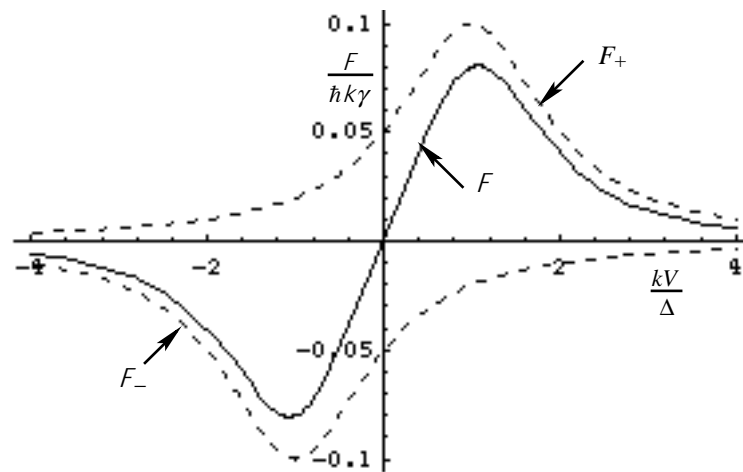


Fig. 3 : force radiative réduite ($F/\hbar k\gamma$) en fonction de la vitesse réduite (kV/Δ) d'un atome. On a posé ici $I = 0,1 I_s$ et $\Delta = -\frac{\gamma}{2}$ (ce choix sera justifié ultérieurement).

□ 12 – On adopte $I = 0,1 I_s$, $\gamma = 6,2 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ et $\Delta = -\frac{\gamma}{2}$. Exprimer et calculer le temps caractéristique de déclin τ de l'énergie de l'atome ainsi ralenti, en supposant qu'il s'agit de sodium ; on trouvera :

$$\tau = \frac{M}{32\hbar k^2} \left(\frac{\gamma}{-\Delta} \right) \left[1 + \left(\frac{2\Delta}{\gamma} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{I_s}{I} \right).$$

3ème Partie : chauffage dû au recul

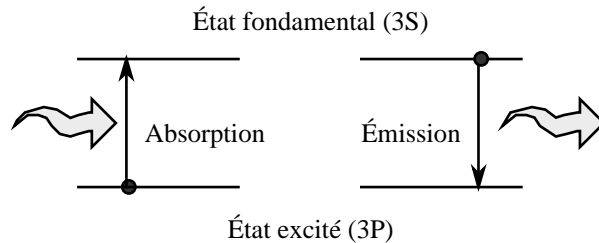


Fig. 4 : chaque photon transporte l'énergie $\hbar\omega$ et la quantité de mouvement $\hbar k$. Les états représentés sont ceux du sodium.

Il résulte du modèle introduit dans les deux premières parties que l'atome devrait finir par être immobilisé. En réalité, la mécanique quantique interdit cet état de repos et propose une autre description des phénomènes, conduisant à un mécanisme de chauffage de l'atome que la mécanique newtonienne ne peut pas prédire, mais que l'expérience confirme :

lors de l'absorption d'un photon, l'atome transite de son état fondamental à un état excité, instable (la durée de vie de l'atome de sodium excité est $\tau \approx 16,2 \text{ ns}$). Lors du déclin, l'atome émet un photon dans une direction aléatoire (ici, le choix est limité aux deux possibilités, $\pm x$). Qu'il s'agisse d'absorption ou d'émission, le transfert de quantité de mouvement entre l'atome et le champ (fig. 4) se fait par bonds de grandeur $\hbar k$. À chaque événement élémentaire absorption-émission correspondent deux échanges de $\hbar k$. Dans un intervalle de temps de durée suffisante, l'atome émet et reçoit ainsi autant d'impulsions d'un côté que de l'autre ; le bilan de ces processus élémentaires est que, en moyenne, la quantité de mouvement de l'atome, $\langle p \rangle$, est nulle. Cependant la valeur moyenne du carré de p ne l'est pas et on montre que, à l'issue de N processus élémentaires, $\langle p^2 \rangle = N(\hbar k)^2$. Dans l'intervalle de temps dt , l'atome échange $dN = 2R_{\text{tot}} dt = 2(R_+ + R_-) dt$ fois la quantité $\hbar k$, où les quantités « R » ont été introduites à la question 3.

□ 13 – Toujours dans le cas des vitesses faibles, calculer, en fonction de k , I , I_s , M , \hbar et γ , le taux de variation d'énergie thermique (réchauffement) de l'atome, défini par la

$$\text{relation } \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{thermique}} = \frac{1}{2M} \frac{d\langle p^2 \rangle}{dt}.$$

□ 14 – À l'équilibre thermodynamique, ce réchauffement est exactement contrebalancé par le refroidissement Doppler. Justifier que cela n'est possible que si Δ est négatif et calculer l'énergie E de l'atome.

Température minimale

□ 15 – En vertu du théorème d'équipartition de l'énergie ($E = k_B T / 2$), que l'on supposera applicable ici, l'énergie de l'atome s'exprime aussi bien, dans ce mouvement unidimensionnel, par $E = \frac{1}{2} k_B T$. Exprimer la température de l'atome et calculer l'écart Δ pour lequel cette température est minimale.

□ 16 – Exprimer la température minimale, T_{\min} , que l'on peut atteindre par cette méthode, calculer sa valeur numérique pour le sodium ($k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$). Commenter.

FIN DU PROBLÈME
FIN DE L'ÉPREUVE

Lecture

L'idée du refroidissement par laser revient à Hänsch et Schawlow (1975) qui suggèrent que des atomes illuminés par deux faisceaux laser se propageant en sens contraire et accordés un peu en dessous de la résonance atomique pouvaient être « refroidis à une dimension ». La *limite Doppler* de cette méthode avoisine 1 mK.

B. Phillips observa ce refroidissement en 1985, dans un piège magnéto optique. Ce montage fut considérablement amélioré par S. Chu, qui utilisa trois paires de lasers pour réaliser une « mélasse optique », où les atomes étaient considérablement ralentis dans trois dimensions. Mais cette méthode permettait d'obtenir des températures plus de six fois inférieures à ce que prédisait la théorie ! Ce paradoxe fut levé par Cohen-Tannoudji, qui mit en évidence des mécanismes subtils de refroidissement. La température ultime était limitée par l'effet de recul : lorsqu'un atome émet un photon, sa quantité de mouvement est diminuée de celle du photon émis. La température la plus basse est ainsi de l'ordre du microkelvin. L'équipe de Cohen-Tannoudji a pu abaisser cette limite d'un facteur 22 (0,18 μK , dans le Césium), en faisant intervenir des effets quantiques nouveaux et en réalisant un tour de force expérimental impressionnant. Les applications pratiques du refroidissement incluent la mise en œuvre d'horloges atomiques aux performances très élevées et la métrologie haute résolution, les applications fondamentales incluent l'étude des interactions atome-photon et d'états de la matière typiquement quantiques.