SESSION 2020

CONCOURS G2E

PHYSIQUE

Durée : 3 heures 30

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées. Les téléphones portables et autres "smartphones" doivent être éteints au cours de l'épreuve et ne doivent en aucun cas être utilisés même à titre de montre.

<u>La rédaction se fera uniquement à l'encre bleue ou noire et l'utilisation du blanc correcteur est interdite.</u>

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.

Dans ce sujet, nous nous intéressons à l'exploitation de l'énergie géothermique.
Après un calcul d'ordre de grandeur de cette énergie (partie 1), nous étudions la production d'air comprimé pour le creusement du puits (partie 2), puis le comportement de l'eau depuis le réservoir (partie 3) jusqu'à la turbine (partie 8), en passant par le puits de forage (parties 4 et 5) et un débitmètre (parties 6 et 7). Nous terminerons par l'étude du principe de fonctionnement des sismographes, qui surveillent en permanence l'environnement sismique des centrales géothermiques.

1. UN CALCUL D'ORDRE DE GRANDEUR

Dans le massif central, le granite est à une température de 200°C à 4000 m de profondeur.
On donne pour le granite : sa capacité thermique massique $c = 900 J.kg^{-1}.K^{-1}$*, sa masse volumique* $\rho = 2,75\times10^3 kg.m^{-3}$ *et sa conductivité thermique* $\lambda = 2,9 W.m^{-1}.K^{-1}$ *. On négligera dans ce calcul la production de chaleur à l'intérieur du granite (par radioactivité). On rappelle qu'un bilan local d'énergie conduit à l'équation de la diffusion thermique à une dimension :*
$\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ *(appelée « équation de la chaleur »).*

1.1. Quelle énergie libèrerait le refroidissement de 200°C à 15°C d'un bloc de granite cubique de 1 km de côté ?

1.2. La puissance thermique d'une centrale nucléaire vaut typiquement $P = 1000 MW$. Combien d'années devrait fonctionner une centrale nucléaire pour libérer la même quantité d'énergie ?

1.3. Déduire de l'équation de la chaleur, par analyse dimensionnelle, un ordre de grandeur (en années) du temps τ_c que prendrait le refroidissement de ce cube de granite, plongé dans l'océan, de température supposée constante.

2. COMPRESSEUR

Le creusement d'un puits géothermique nécessite de l'air comprimé. Un compresseur aspire, avec un débit massique D_m, de l'air considéré comme un gaz parfait. Dans cette partie l'indice i se rapporte à l'état initial (air atmosphérique), et l'indice f à l'état final (air comprimé). On néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle de cet air, et la compression est considérée comme adiabatique et réversible.

On rappelle qu'en régime stationnaire, le bilan d'énergie (premier principe industriel) pour un système ouvert peut s'écrire : $P_m + P_{th} = D_m \left[h + e_c + e_p \right]_{entrée}^{sortie}$*, où* h *est l'enthalpie massique,* e_c *est l'énergie cinétique massique,* e_p *est l'énergie potentielle de pesanteur massique,* P_m *la puissance mécanique utile reçue,* P_{th} *la puissance thermique reçue. D'autre part la notation* $\left[X \right]_{entrée}^{sortie}$ *signifie :* X *en sortie moins* X *en entrée.*

2.1. Rappeler la définition de l'enthalpie et en déduire que la variation d'enthalpie massique de l'air peut s'écrire ici : $dh = vdp$, où v est le volume massique (volume d'un kilogramme d'air).

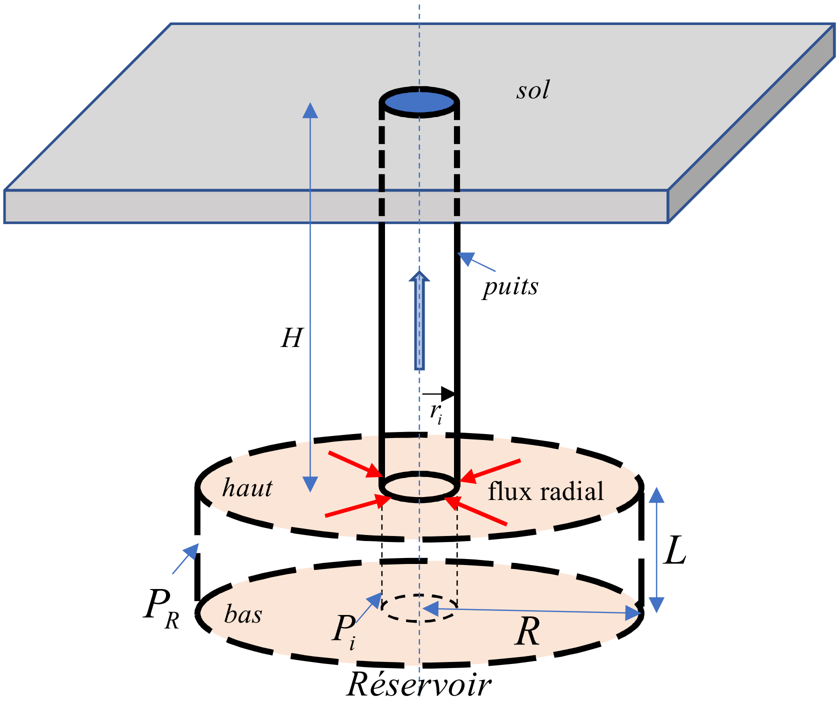
2.2. Rappeler la loi de Laplace reliant p, v et la constante $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V}$ (rapport des capacités thermiques molaires à pression, ou à volume, constant). En déduire par intégration la différence $\Delta h = h_f - h_i$ entre les enthalpies massiques dans l'état final et dans l'état initial.

2.3. Appliquer le premier principe industriel (en système ouvert) au compresseur, et montrer que la puissance mécanique de compression vaut $P_m = D_m p_i v_i \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \left[r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$, où r représente le rapport de compression $\dfrac{p_f}{p_i}$.

On donne $D_m = 2 kg.s^{-1}$, $c_V = \dfrac{5}{2} R$, constante des gaz parfaits $R = 8,31 J.K^{-1}$, $p_i = 1 bar = 10^5 Pa$, $p_f = 20 bar$, $T_i = 20°C$, la masse molaire (moyenne) de l'air $M = 29 g.mol^{-1}$, et on rappelle que *0°C = 273 K.*

2.4. Calculer le volume massique de l'air atmosphérique, et déterminer la valeur de la constante γ. En déduire la puissance du compresseur.

3. ECOULEMENT DANS LE RESERVOIR POREUX



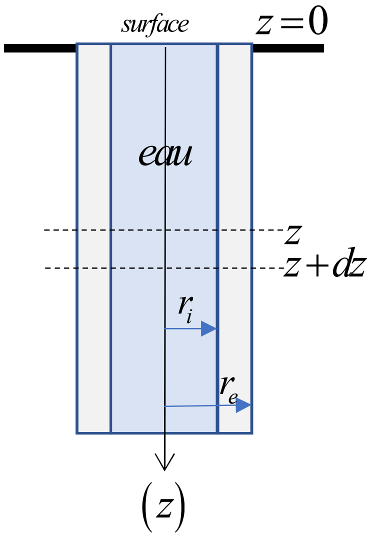
L'eau chaude qui alimente une centrale géothermique est prélevée dans un réservoir d'eau souterraine en profondeur. Dans ce réservoir poreux et homogène l'eau est contenue à l'état de liquide (incompressible).
Avant tout prélèvement dans le puits (assimilé à un cylindre vertical de rayon r_i), la pression d'eau dans le réservoir est uniforme et vaut p_R (on négligera sa variation avec la profondeur). Lorsque l'on prélève de l'eau par le puits de forage, la pression p de l'eau dans le réservoir diminue jusqu'à une distance R à l'axe du puits.
On suppose qu'un régime stationnaire est atteint. La hauteur L du réservoir étant relativement faible, on considère que la pression p et la vitesse v de l'eau ne dépendent que de la distance r à l'axe du puits. On a ainsi $p(R) = p_R$, $p(r_i) = p_i$, et pour $r \in [r_i, R]$, $\vec{v} = v(r)\overrightarrow{u_r}$, où $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire radial dans le sens des r croissants. Dans cette géométrie cylindrique, la loi de Darcy peut s'écrire : $v(r) = -\dfrac{K}{\eta}\dfrac{dp}{dr}$, où v est la vitesse de l'eau, η est sa viscosité (dynamique), et K est la perméabilité du milieu (supposée uniforme).

3.1. Quelle est la dimension de K ? Justifier.

3.2. Justifier que pour $r \in [r_i, R]$, $v(r) = -\dfrac{D_m}{2\pi\rho L r}$, où D_m représente le débit massique de l'eau qui rentre dans le puits, et ρ sa masse volumique.

3.3. En déduire l'expression de la pression p_i (que l'on peut considérer comme la pression d'entrée dans le puits) en fonction de $p_R, D_m, \eta, K, \rho, L, r_i$ et de R .

4. CONDUCTION DE LA CHALEUR DANS LE PUITS



Le puits d'alimentation est modélisé par un cylindre de révolution vertical, de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e, homogène et de conductivité thermique λ. On repère la *profondeur* à partir de la surface à l'aide d'un axe vertical (z) orienté vers le *bas*, comme indiqué sur la figure ci-contre.
On suppose pour l'instant que toute la surface intérieure du puits est maintenue à la température $T_i = T(r_i)$ et que la surface extérieure est maintenue à la température $T_e = T(r_e)$ (uniforme également). Les extrémités du tube (en $z = 0$ et $z = H$) sont parfaitement isolées thermiquement : T ne dépend que de la distance r à l'axe (z). On notera $j(r)$ la densité de flux thermique.

4.1. Justifier qu'en régime stationnaire, le flux thermique ϕ est le même à travers tout cylindre de hauteur H, d'axe (z) et de rayon $r \in [r_i, r_e]$.

4.2. Déterminer la résistance thermique R de cette conduite en fonction de r_i, r_e, λ et H.

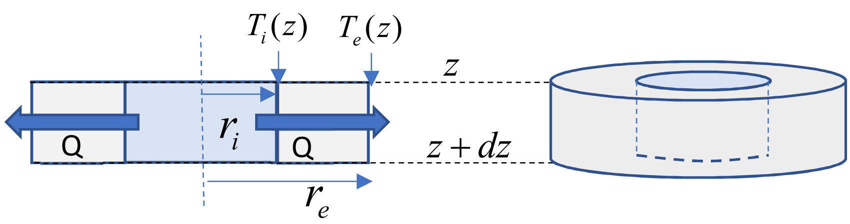
4.3. En déduire l'expression de la température $T(r)$ à l'intérieur du tube, pour $r \in [r_i, r_e]$, uniquement en fonction de T_i, T_e, r_i, r_e et r.

En réalité la température du sol et de l'eau dans le tube dépendent de la profondeur z. On suppose que la température $T_i(z)$ de la surface intérieure du puits est égale à la température de l'eau à la profondeur z, et de même $T_e(z)$ est égale à la température du sol à la profondeur z. On suppose pour l'instant que l'eau se trouve à l'état liquide dans tout le tube et se comporte comme un fluide incompressible. Le sol est homogène et la température ne dépend que de z et de la distance r à l'axe de symétrie (z) du puits. On suppose que l'on a atteint un régime stationnaire : $T_i(z)$ et $T_e(z)$ sont indépendantes du temps. On considère que le transfert thermique ne se fait que *radialement* (on néglige les transferts thermiques par conduction dans la direction z).

L'eau chaude monte (sens z *décroissant*) à la vitesse constante v dans le tuyau. On note c la capacité thermique massique de l'eau (à volume constant), ρ sa masse volumique, et D_m son débit massique. Sa viscosité est supposée négligeable.

4.4. En supposant provisoirement l'eau immobile, montrer que la quantité $p_{(z)} - \rho g z$ est indépendante de z.

On admet maintenant qu'en régime d'écoulement stationnaire, la répartition de la pression $p(z)$ dans l'eau n'est pas modifiée par rapport au cas de l'hydrostatique. On rappelle d'autre part que l'eau est supposée incompressible et que le diamètre du tuyau est constant.



4.5. Justifier que dans ces conditions, la quantité $\frac{p}{\rho} - gz + \frac{v^2}{2}$ a la même valeur en z et en $z+dz$. Justifiez d'autre part que l'enthalpie massique peut s'écrire $h = u + \frac{p}{\rho}$, où u est l'énergie interne massique.

4.6. Appliquer le premier principe industriel (rappelé au paragraphe 2) au volume de contrôle de rayon r_i compris entre les profondeurs z et $z+dz$ (cf. schéma). Exprimer la puissance thermique P_{th} reçue par la tranche de hauteur dz en fonction de $\lambda, r_i, r_e, T_i(z), \mathrm{T}_e(z)$ et dz, et en déduire que la température $T_i(z)$ de l'eau dans le puits varie avec la profondeur z selon : $dT_i = T_i(z+dz) - T_i(z) = \frac{T_i(z) - T_e(z)}{A} dz$, où A est une constante à exprimer en fonction de D_m, c, r_i, r_e et λ. Vérifiez que A a bien la dimension d'une longueur.

On suppose que la température du sol à l'extérieur du tuyau varie linéairement avec la profondeur : $T_e(z) = T_0 + \beta z$, où β (le *gradient géothermique*) est une constante.

4.7. D'après la question précédente, à quelle équation différentielle obéit la température $T_i(z)$? Chercher une solution de cette équation du type $T_i(z) = ae^{bz} + cz + d$, où a,b,c et d sont quatre constantes. En déduire les valeurs de b,c et d en fonction de A,β et T_0.

On suppose qu'à la profondeur $z = H$ du réservoir, la température de l'eau est la même que celle du sol.

4.8. En déduire l'expression de la constante a et l'expression complète de $T_i(z)$ en fonction de β, A, H, T_0 et z.

5. HORIZON DU PUITS

Dans les paragraphes suivants (5 et 8) on se servira de certaines **données thermodynamiques** de l'eau (on rappelle que $0°C = 273K$).

T en °C	$p_{V,sat}(bar)$	$h_L(kJ.kg^{-1})$	$h_V(kJ.kg^{-1})$	$s_L(kJ.kg^{-1}.K^{-1})$	$s_V(kJ.kg^{-1}.K^{-1})$
280	65	1236			
165	7	697	2763	1,993	
50	0,12	209	2591	0,7037	8,074

Dans ce tableau on lit en fonction de la température : la pression de vapeur saturante $p_{V,sat}$, les enthalpies massiques du liquide saturé h_L et de la vapeur saturée h_V ainsi que les entropies massiques correspondantes s_L et s_V.

A l'entrée du puits (jonction avec le réservoir à la profondeur $z = H = 2km$), l'eau est dans l'état A. Sa pression vaut $p_A = 170bar$ et sa température $T_A = T(z = H) = 280°C$. On néglige désormais les échanges de chaleur et les frottements entre l'eau et les parois au cours de sa montée dans le puits : sa température est supposée constante. A cette température la masse volumique ρ de l'eau liquide vaut environ $0,70kg.L^{-1}$ (indépendamment de la pression). L'intensité de la pesanteur vaut $g = 9,81m.s^{-2}$. On se place en régime stationnaire et on suppose que la loi de l'hydrostatique est encore applicable à cette situation.

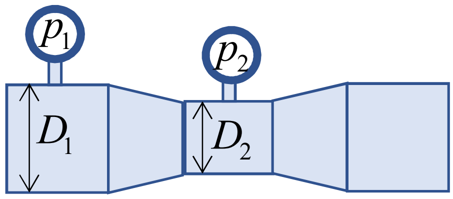
5.1. Calculer à quelle profondeur z_B l'eau atteint sa pression de vapeur saturante (cette profondeur est appelée « flash horizon » en anglais technique…). L'eau est alors dans l'état B, toujours à la température $T = T_B \simeq 280°C$. Quelle transformation subit l'eau entre z_B et la surface ?

On admet que le passage de l'eau depuis l'état B (à la profondeur z_B) jusqu'à l'état C en surface ($z_C = 0$) se fait (approximativement) à enthalpie constante : $h_C = h_B$. Le débit vaut $D_m = 75kg.s^{-1}$. L'eau parvient en surface à la pression $p_C = 7bar$ et à la température $T_C = 165°C$. On rappelle que 0°*C* = *273 K.*

5.2. Expliquer qualitativement pourquoi l'eau a nettement refroidi entre les états B et C. Quelle est l'origine physique de ce refroidissement, au niveau microscopique ?

5.3. Calculer la fraction x_V de vapeur d'eau dans l' état C et le débit massique de vapeur $D_{\mathrm{m},V}$.

6. MESURE DE DEBIT



L'eau liquide est séparée de la vapeur et injectée dans un circuit de chauffage urbain. On estime le débit massique d'eau *liquide* en la faisant passer (en régime stationnaire) à travers un tube cylindrique horizontal comportant un rétrécissement (tube *de Venturi*). Cette eau chaude, de masse volumique $\rho = 902 kg.m^{-3}$ est supposée incompressible. Dans la section de tube de diamètre $D_1 = 20cm$, la pression vaut p_1 , alors que dans la section de diamètre $D_2 = 7{,}0cm$, elle vaut p_2.

6.1. En négligeant la viscosité, exprimer le débit massique de l'eau liquide $D_{m,L}$ en fonction de sa masse volumique ρ, de la différence de pression mesurée $\Delta p = p_1 - p_2$, et des diamètres D_1 et D_2.

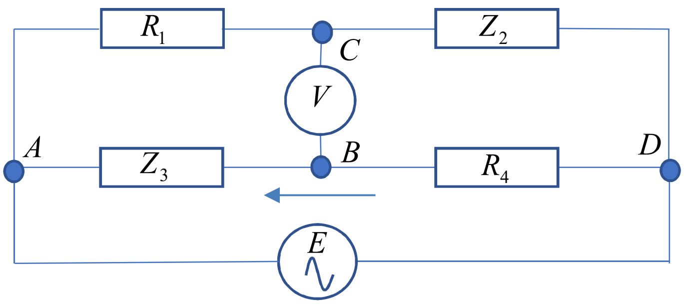
6.2. Application numérique : on mesure $\Delta p = 1{,}11 bar$. En déduire le débit massique $D_{m,L}$ d'eau liquide.

A cette température, la viscosité de l'eau est de l'ordre de $10^{-4} Pa.s$.

6.3. L'écoulement de l'eau dans le tube de Venturi est-il laminaire ou turbulent ? Justifier.

7. MANOMETRE DIFFERENTIEL

En pratique on mesure directement la différence de pression à l'aide d'un capteur « magnétique » : le noyau d'une bobine est déplacé proportionnellement à Δp, ce qui modifie la valeur de son inductance L : la mesure de L permet de déterminer Δp.



Cette mesure peut se faire grâce au circuit ci-contre (appelé « pont de Maxwell »), dans lequel R_1 et R_4 sont deux dipôles ohmiques de valeur fixe et connue. Z_3 est l'impédance de la bobine, modélisée par une inductance idéale L_3 en série avec un dipôle ohmique R_3, inconnus. Enfin Z_2 est constitué d'un condensateur C_2 réglable en parallèle avec une résistance R_2 réglable.

7.1. Montrer qu'en régime régime sinusoïdal forcé (imposé par le GBF de f.é.m. E), le voltmètre noté V n'indique « zéro » que si $R_1R_4 = Z_2Z_3$. On dit dans ce cas que le « pont » est « équilibré ». On considère que le voltmètre est idéal (d'impédance infinie).

On suppose que l'on a réglé R_2 et C_2 de telle sorte que le pont soit équilibré.

7.2. Exprimer Z_2 et Z_3 en fonction de R_2, C_2, R_3, L_3 et de la pulsation ω du générateur. En déduire d'une part l'expression de R_3 en fonction de R_1, R_2 et R_4 , et d'autre part l'expression de L_3 en fonction de R_1, R_4 et C_2.

On règle $R_1 = 100\Omega; R_2 = 1,00k\Omega; R_4 = 100\Omega$ et $C_2 = 10,0\mu F$ pour obtenir l'équilibre du pont.

7.3. En déduire les caractéristiques de la bobine.

8. TURBINE

L'état C défini au §5 est un mélange de liquide saturé (état D) et de vapeur saturée (état E). La vapeur est séparée de la phase liquide et envoyée à l'entrée d'une turbine horizontale. On suppose que la détente dans cette turbine s'effectue de manière adiabatique et réversible. En sortie de la turbine l'eau entre (à l'état F, à 50°C) dans un condenseur dont la température est maintenue à 50°C également, et qui ne contient que de l'eau (liquide ou vapeur). On néglige les variations d'énergie cinétique et le transfert thermique entre l'eau et la turbine. Si vous n'avez pas répondu à la question 5.3, le débit massique d'eau vapeur $D_{m,V}$ sera pris égal approximativement à $20 kg.s^{-1}$.

8.1. Montrer à partir des données du tableau (au début du § 5) que l'entropie massique de la vapeur qui rentre dans la turbine vaut $6,709 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$.

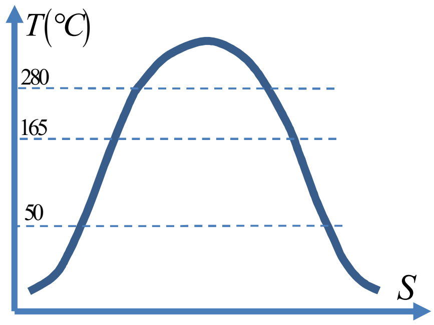
8.2. En déduire la valeur de l'entropie massique en F (justifier). Calculer la fraction massique de vapeur en F, et en déduire l'enthalpie massique correspondante.

8.3. Quelle puissance mécanique est fournie à la turbine ?

L'eau sort du condenseur à l'état de liquide saturé à 50°C en équilibre avec la vapeur (état G). Le condenseur est refroidi extérieurement par de l'eau puisée dans une rivière voisine. Cette eau arrive en contact avec la surface extérieure du condenseur à la température $T_e = 15°C$ et ressort à la température $T_s = 30°C$. On rappelle la capacité thermique massique de l'eau $c = 4,180 J.K^{-1}.g^{-1}$.

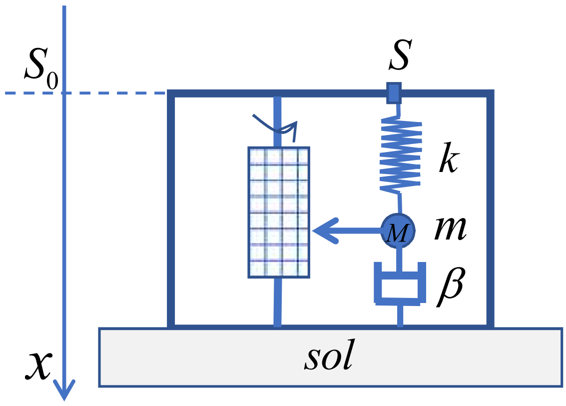
8.4. Quel débit massique $D_{m,riv}$ d'eau de rivière est nécessaire pour refroidir le condenseur ? Pour le fonctionnement de la turbine, quel est l'intérêt de refroidir le condenseur ?

8.5. Reproduire l'allure du diagramme entropique ci-contre (courbe de saturation) et placer approximativement les points A, B, C, D, E, F et G dont il est question dans le sujet. *Remarque : A et B sont à peu près confondus dans un tel diagramme.*



9. PRINCIPE D'UN SISMOGRAPHE

On modélise un sismographe par un pendule élastique vertical dont l'extrémité supérieure S est fixée au boitier de l'instrument, lui-même solidaire du sol. Le pendule est constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, et d'une masse m dont le centre d'inertie sera noté M. La masse est également soumise à une force de frottement visqueux de la forme $-\beta\vec{v}$ (assimilée à l'action d'un piston solidaire du boitier) : dans cette expression, β est une constante et $\vec{v}$ est la vitesse de la masse <u>par rapport à S</u>.



A l'instant initial l'altitude du point S coïncide avec celle d'un point S_0 fixe dans un référentiel R_0 *galiléen*. On pourra utiliser le repère (S_0, x, y, z) associé à R_0. L'axe (x) est orienté à la verticale vers le bas. Dans un premier temps on étudie le mouvement du point M en l'absence de perturbation (autrement dit S est immobile dans R_0).

On note X la distance SM et g l'intensité de la pesanteur.

9.1. Quelle est l'expression X_{eq} de X à l'équilibre ?

9.2. La masse est lâchée en dehors de sa position d'équilibre. Etablir l'équation différentielle de son mouvement, à laquelle obéit la fonction $X(t)$.

9.3. On pose $Y = X - X_{eq}$. Montrer que l'équation différentielle précédente peut s'écrire sous la forme $\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = 0$, où l'on précisera les expressions des constantes λ et ω_0 en fonction de β, k et m.

9.4. Citer dans un autre domaine de la physique un système obéissant à une équation différentielle du même type : $\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = 0$. Décrire ce système et faire la comparaison avec le système mécanique : quel est l'équivalent de la masse, de la raideur du ressort, et du coefficient de frottement ?

On étudie maintenant la réaction du système au passage d'une onde sismique modélisée par une oscillation sinusoïdale d'amplitude a constante. L'abscisse x du point de suspension S dans le référentiel R_0 est $x_S = a\cos(\omega t)$. On note x_M l'abscisse de la masse m dans le référentiel R_0.

9.5. Quel est le lien entre $\ddot{x}_M$, $\ddot{x}_S$, et $\ddot{X}$? Quel est le lien entre $\ddot{X}$ et $\ddot{Y}$? Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse dans le référentiel galiléen R_0, et en déduire l'équation différentielle suivante : $\ddot{Y} + 2\lambda\dot{Y} + \omega_0^2 Y = a\omega^2\cos(\omega t)$.

En régime forcé (ou *permanent*), on pose $Y(t) = \mathrm{A}\cos(\omega \mathrm{t} + \varphi)$, où φ est une constante. D'autre part on introduit la *pulsation relative* $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et le *facteur de qualité* $Q = \dfrac{\omega_0}{2\lambda}$.

9.6. Montrer que l'amplitude A des oscillations forcées de la masse est donnée par : $A = \dfrac{a}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{u^2} - 1\right)^2 + \dfrac{1}{Q^2u^2}}}$. Il est conseillé d'utiliser la notation complexe.

9.7. Montrer que A est maximale pour une certaine valeur $u_{\max}$ de u que l'on exprimera en fonction de Q.

On mesure $u_{\max} = 1{,}192$, $k = 0{,}50 N.m^{-1}$ et $m = 200 g$.

9.8. En déduire la valeur du facteur de qualité Q et une valeur approximative du coefficient de frottement β.

9.9. Quelles sont les valeurs de l'amplitude des oscillations de la masse dans les deux cas limites : d'une part, $u \ll 1$ et $u \gg 1$ d'autre part ? Expliquer qualitativement le résultat obtenu dans chaque cas.

On peut considérer une onde sismique réelle comme une superposition d'ondes sinusoïdales de pulsations comprises entre deux valeurs données $\omega_{\min}$ et $\omega_{\max}$. On rappelle que le but d'un sismographe est d'enregistrer le plus fidèlement possible les mouvements verticaux *du sol*.

9.10. Comment faut-il choisir ω_0 par rapport aux valeurs $\omega_{\min}$ et/ou $\omega_{\max}$ pour fabriquer un sismographe ?