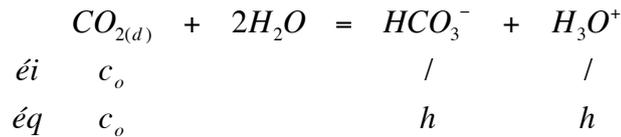


Sujet A : corrigé

- Q1.** Transformation du glucose : $C_6H_{12}O_6 = 3CO_2 + 3CH_4$.
- Q2.** Méthane : CH_4 (quatre liaisons simples). CO_2 : $O=C=O$ avec deux doublets sur chaque oxygène.
- Q3.** Méthane : tétraèdre, angles $109^\circ 28'$. Dioxyde de carbone : molécule linéaire, 180° .
- Q4.** On applique la formule donnée, sachant que la pression partielle de CO_2 se trouve à partir de la proportion en CO_2 dans le gaz. On trouve :

$$[CO_{2(d)}] = K_{CO_2} \frac{x_{CO_2} P}{P^\circ} \times c^\circ = 2,5 \cdot 10^{-2} \times \frac{0,4 \times 10}{1} \times 1 = \underline{\underline{0,10 \text{ mol.L}^{-1}}}$$

- Q5.** On appellera h la concentration en ions H_3O^+ .
On cherche la réaction prépondérante qui est ici l'action de $CO_{2(d)}$ sur l'eau. On néglige les concentrations des espèces qui n'apparaissent pas par la réaction prépondérante devant l'avancement volumique. Cela donne $[OH^-], [CO_3^{2-}] \ll [HCO_3^-] = h$.



On remarque que la concentration en $CO_{2(d)}$ est constante et imposée par la présence du gaz, on remarque également que l'avancement volumique est égal à h .

On utilise la constante de la première acidité de CO_2 pour en déduire le pH , on trouve :

$$pH = \frac{1}{2} (pK_{a_1} - \log c_o) = \frac{1}{2} (6,4 - \log 0,1) = \underline{\underline{3,7}}$$

On vérifie bien que $[OH^-] \ll h$ ($pH \leq 6,5$), et que $[CO_3^{2-}] \ll [HCO_3^-]$ ($pH \leq pK_{a_2} - 1 = 9,3$)

- Q6.** Les gouttelettes d'eau présentes dans le biogaz sont donc extrêmement acides, le gaz sera corrosif, il faut éliminer l'eau.
- Q7.** La concentration en H_2S se calcule :

$$[H_2S_{(d)}] = K_{H_2S} \frac{P_{H_2S}}{P^\circ} c^\circ = 0,1 \times \frac{0,1 \cdot 10^{-2} \times 10}{1} \times 1 = \underline{\underline{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}}}$$

- Q8.** Réaction : $H_2S + DEA = HS^- + DEAH^+$.

$$\text{Sa constante est : } K = \frac{K'_{a_1}}{K_a} = \frac{10^{-7}}{10^{-9}} = \underline{\underline{10^2}}$$

- Q9.** La constante est grande, la réaction est totale. Au fur et à mesure de sa consommation, H_2S est dissous.

- Q10.** Combustion du méthane : $CH_{4(g)} + 2O_{2(g)} = CO_{2(g)} + 2H_2O_{(g)}$.

Enthalpie standard de la réaction :

$$\Delta_r H^\circ = 2\Delta_f H^\circ_{H_2O} + \Delta_f H^\circ_{CO_2} - \Delta_f H^\circ_{CH_4}$$

$$\Delta_r H^\circ = 2 \times (-240) + (-390) - (-110) = \underline{\underline{-760 \text{ kJ.mol}^{-1}}}$$

- Q11.** On dresse un bilan des quantités de matière des réactifs gazeux (en mol) :

$$CH_4 : 0,95n_o ; CO_2 : 0,05n_o ; O_2 : 1,9n_o ; N_2 : 7,6n_o$$

Après la combustion, le mélange gazeux est constitué (en mol) de :

$$CO_2 : n_o ; H_2O : 0,9n_o ; N_2 : 7,6n_o$$

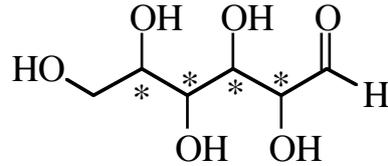
- Q12.** La chaleur dégagée par la réaction qu'on suppose se dérouler à 300 K sert à échauffer les produits formés. On en déduit l'équation suivante :

$$0,95n_o \Delta_r H^\circ + n_o (C_p^\circ_{CO_2} + 1,9C_p^\circ_{H_2O} + 7,6C_p^\circ_{N_2}) (T_f - T_o) = 0.$$

$$\text{Finalement : } T_f = T_o - \frac{0,95\Delta_r H^\circ}{C_p^\circ_{CO_2} + 1,9C_p^\circ_{H_2O} + 7,6C_p^\circ_{N_2}}$$

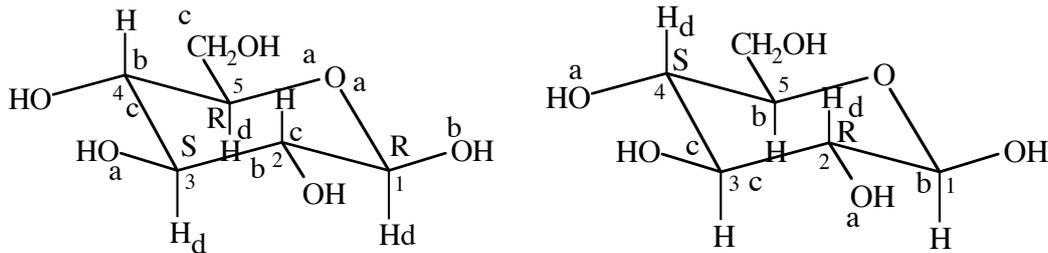
$$\text{Q13. } T_f = 300 + \frac{0,95 \times 760 \cdot 10^3}{45 + 9,5 \times 30} \approx \underline{\underline{2,50 \cdot 10^3 \text{ K} \approx 2500 \text{ K}}}$$

Q14. Structure du pentahydroxy-2,3,4,5,6-hexanal :



Q15. Il y a quatre atomes de carbone asymétriques et aucun plan de symétrie possible, il y a donc $2^4 = 16$ stéréoisomères possibles. Des diastéréoisomères sont des stéréoisomères non énantiomères.

Q16. Les configurations absolues des atomes de carbone asymétriques sont déterminées sur les deux structures suivantes (pour éviter les collisions). Les substituants sont désignés par ordre décroissant de priorité : a, b, c et d.



Pour plus de clarté, on donne les substituants par ordre de priorité décroissante pour chaque atome de carbone asymétrique :

Carbone n° 1 (R) : O, OH, C₂, H

Carbone n° 3 (S) : OH, C₂, C₄, H

Carbone n° 5 (R) : O, C₄, C₆, H

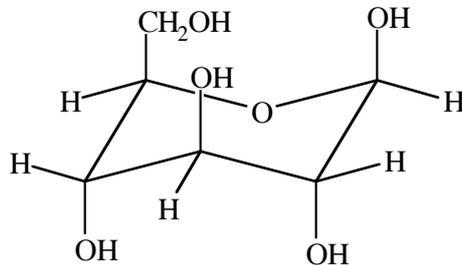
Carbone n° 2 (R) : OH, C₁, C₃, H

Carbone n° 4 (S) : OH, C₅, C₃, H

Les configurations absolues sont donc : 1 : R, 2 : R, 3 : S, 4 : S et 5 : R.

On remarque qu'il y a un atome de carbone asymétrique de plus dans le stéréoisomère cyclique que dans le glucose linéaire.

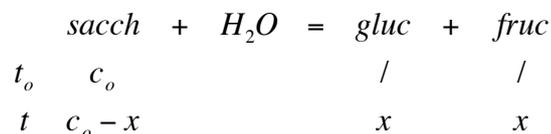
Q17. On dessine l'autre conformère de la molécule de β-D-glucose.



On remarque que dans ce conformère, les substituants encombrants sont en position axiale et non plus en position équatoriale comme dans l'autre forme. Cela justifie la stabilité particulière du conformère tel qu'il est donné dans l'énoncé.

$$\text{Q18. } \alpha = C_S[\alpha]_S \ell + C_G[\alpha]_G \ell + C_F[\alpha]_F \ell$$

Q19. On dresse un bilan de matière pour la réaction (les concentrations étant exprimées en mol.L⁻¹).



Si l'on admet un ordre 1 par rapport au saccharose, on peut écrire :

$v = \frac{dx}{dt} = k(c_o - x)$. Il s'agit d'une équation différentielle qu'on peut laisser ainsi ou

écrire : $\frac{dx}{dt} + kx = kc_o$ ou $\frac{dx}{c_o - x} = kdt$

Q20. La relation entre les concentrations massiques et molaires s'obtient à l'aide des masses

molaires : $c_i = \frac{n_i}{V} = \frac{m_i}{M_i V} = \frac{C_i}{M_i}$. On en déduit les relations demandées :

$$c_S = \frac{C_S}{M_S}; c_F = \frac{C_F}{M_{FG}}; c_G = \frac{C_G}{M_{FG}}$$

Q21. On résout l'équation différentielle et on obtient : $\ln \frac{c_o}{c_o - x} = kt$.

On transforme maintenant les expressions des pouvoirs rotatoires, en sachant que les C_i seront remplacées par les $c_i M_i$:

$$\alpha_o = [\alpha]_S M_S c_o \ell$$

Au temps infini, les concentrations molaires de glucose et de saccharose sont égales à c_o , on en déduit leurs concentrations massiques ainsi que l'expression du pouvoir rotatoire : $\alpha_\infty = M_{FG}([\alpha]_G + [\alpha]_F)c_o \ell$

$$\alpha_t = M_S[\alpha]_S(c_o - x)\ell + M_{FG}([\alpha]_G + [\alpha]_F)x\ell.$$

On transforme les expressions précédentes en cherchant à faire apparaître c_o et $c_o - x$. On remarquera que le fructose et le glucose

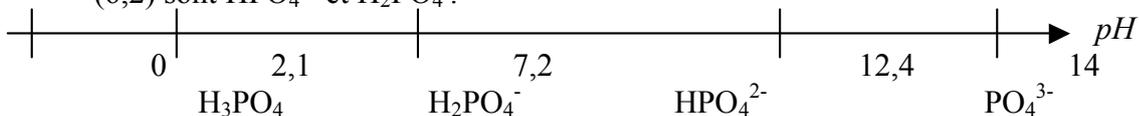
$$\alpha_\infty - \alpha_t = M_{FG}([\alpha]_G + [\alpha]_F)(c_o - x)\ell - M_S[\alpha]_S(c_o - x)\ell = (M_{FG}([\alpha]_G + [\alpha]_F) - M_S[\alpha]_S)(c_o - x)\ell$$

$$\alpha_\infty - \alpha_o = \{M_{FG}([\alpha]_G + [\alpha]_F) - M_S[\alpha]_S\}c_o \ell$$

Finalement l'équation différentielle devient : $\ln \frac{\alpha_\infty - \alpha_o}{\alpha_\infty - \alpha} = kt$

Q22. Si l'on veut une quantité totale en phosphore égale à c , il faut introduire : $m_1 = cVM_1 = 0,10 \times 1 \times 336 = \underline{\underline{33,6 \text{ g}}}$.

Q23. Compte-tenu des différents pK_a de l'acide, on peut tracer le diagramme de prédominance de cet acide. On trouve donc que les espèces présentes au pH considéré (6,2) sont HPO_4^{2-} et H_2PO_4^- .



Q24. Lorsqu'on ajoute l'hydroxyde de sodium la réaction est :

$\text{H}_2\text{PO}_4^- + \text{OH}^- = \text{HPO}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O}$. Sa constante est : $K = \frac{K_{a2}}{K_e} = \frac{10^{-7,2}}{10^{-14}} = \underline{\underline{10^{6,8} \gg 1}}$. On peut

la considérer comme totale, l'espèce en défaut étant OH^- .

Q25. Le mélange qu'on obtient ensuite est un mélange de deux espèces conjuguées qui coexistent : leurs concentrations sont inchangées. On en déduit : $[\text{HPO}_4^{2-}] = \frac{n_2}{V}$ et

$$[\text{H}_2\text{PO}_4^-] = \frac{n_1 - n_2}{V}.$$

Q26. Alors le pH de la solution s'exprime : $pH = pK_2 + \log \frac{n_2}{n_1 - n_2}$.

Q27. On trouve : $\frac{n_2}{n_1 - n_2} = 10^{pH - pK_{a2}} = 10^{6,2 - 7,2} = 0,1 = \frac{1}{10}$. On en tire :

$$n_2 = \frac{n_1}{11} = \frac{0,1}{11} = \underline{\underline{9,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol}}}. \text{ Alors } m_2 = n_2 M_2 = \frac{0,1}{11} \times 40 = \underline{\underline{0,36 \text{ g}}}.$$

Q28. Vitesse de formation du produit P : $v = k_2[ES]$.

Q29. La conservation de l'enzyme s'écrit : $[E]_o = [E] + [ES]$.

Q30. On applique l'AEQS à ES : $\frac{d[ES]}{dt} = k_1[S][E] - (k_{-1} + k_2)[ES] = 0$. On remplace l'expression de [E] par celle trouvée précédemment et l'on en déduit la concentration en ES : $k_1[S]([E]_o - [ES]) - (k_{-1} + k_2)[ES] = 0 \Rightarrow [ES] = \frac{k_1[S][E]_o}{k_1[S] + (k_{-1} + k_2)}$.

Q31. La vitesse s'écrit : $v = \frac{k_1 k_2 [S][E]_o}{k_1[S] + (k_{-1} + k_2)} = \frac{k_2[S][E]_o}{[S] + K_M}$.

Q32. Si l'on augmente la concentration en substrat (à concentration initiale en enzyme constante), [S] deviendra très grande devant K_M et l'expression de la vitesse tendra vers $k_2[E]_o$. Il s'agit donc de la vitesse maximale qu'on puisse obtenir en augmentant la concentration en substrat.

On peut également voir que dès que tout l'enzyme est complexé sous forme de complexe enzyme-substrat, [E] libre devient négligeable devant [ES], donc $[ES] \approx [E]_o$ et l'expression de la vitesse devient $k_2[E]_o$. C'est donc la vitesse maximale atteinte lorsque la concentration en enzyme augmente par rapport à la concentration en substrat.

Q33. On exprime $\frac{1}{v}$ à partir de l'expression précédente :

$$\frac{1}{v} = \frac{K_M}{k_2[E]_o} \times \frac{1}{[S]} + \frac{1}{k_2[E]_o} = \frac{K_M}{v_{\max}} \times \frac{1}{[S]} + \frac{1}{v_{\max}}. \text{ Alors si l'on trace } \frac{1}{v} \text{ en fonction de } \frac{1}{[S]}$$

et que le modèle correspond à la réaction, on obtiendra une droite de pente $\frac{K_M}{k_2[E]_o}$ et

d'ordonnée à l'origine $\frac{1}{k_2[E]_o}$.

Q34. On transforme l'expression précédente :

$$v = \frac{v_{\max}[S]}{[S] + K_M} \Rightarrow v[S] + vK_M = v_{\max}[S] \Rightarrow v = v_{\max} - \frac{vK_M}{[S]}. \text{ Alors si l'on trace } v \text{ en}$$

fonction de $\frac{v}{[S]}$, et que le modèle est validé, on obtient une droite d'ordonnée à

l'origine v_{\max} et de pente $-K_M$.

Q35. On trace l'évolution de la concentration en produit P par exemple, et la pente de la tangente à l'origine donne la valeur de la vitesse initiale de la réaction.

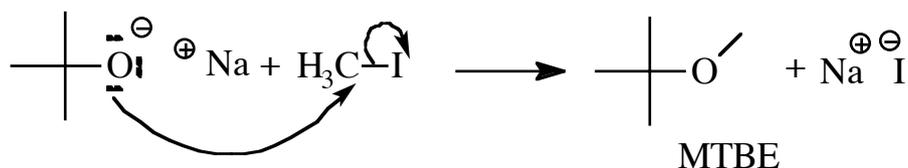
Q36. Première méthode. L'inverse de l'ordonnée à l'origine donne la vitesse maximale :

$$v_{\max} = \frac{1}{185} = \underline{\underline{5,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}}.$$

La pente vaut $\frac{K_M}{v_{\max}}$, donc $K_M = \text{pente} \cdot v_{\max} = 3,8 \times 5,4 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{2,1 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}}$.

Q37. Deuxième méthode. L'opposé de la pente donne la constante de Michaelis : $K_m = 22,1 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{2,2 \cdot 10^{-2}}}$. L'ordonnée à l'origine donne la vitesse maximale : $v_{\max} = \underline{\underline{5,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}}$. Les deux résultats sont compatibles, la deuxième méthode est plus simple à interpréter.

Q38. On écrit l'équation de la réaction, les formules semi-développées sont données dedans.



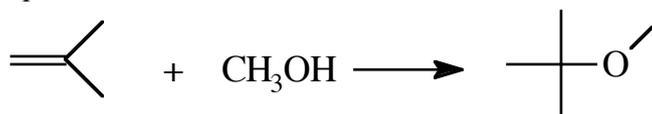
Q39. Cette réaction est la réaction de Williamson. On peut proposer un mécanisme S_N2 sachant que l'halogénoalcane est peu encombré et que le nucléophile est fort. Le mécanisme est présenté à la question précédente.

Q40. L'alcoolate s'obtient à partir de l'alcool et de sodium.

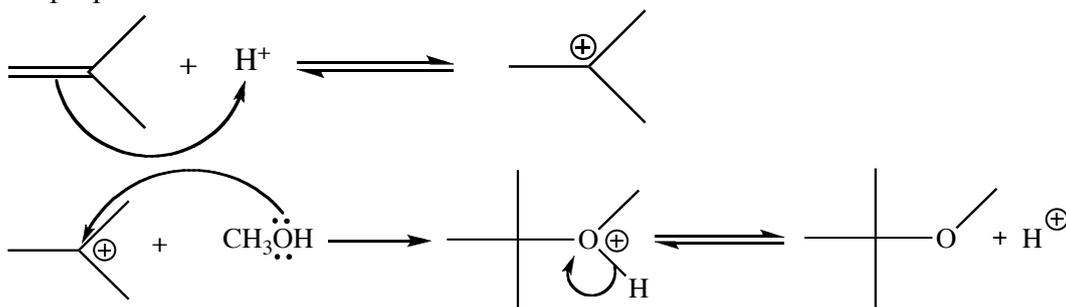


On doit utiliser un solvant aprotique sinon il réagirait avec l'alcoolate et redonnerait l'alcool. On peut à la rigueur utiliser l'alcool correspondant à l'alcoolate comme solvant.

Q41. Équation de la réaction :



Q42. On propose un mécanisme



En l'absence de H^+ , l'addition du méthanol sur l'alcène est moins rapide : il s'agit d'une assistance électrophile. En plus, l'ion H^+ est régénéré à la fin du mécanisme : il n'apparaît donc pas dans l'équation-bilan.

Q43. On a ici des réactifs simples à obtenir, issus de l'industrie, et l'on n'a pas à utiliser de sodium pour obtenir l'alcoolate.

Q44. Demi-équation électronique du méthanol :

$$\text{CH}_3\text{OH} + \text{H}_2\text{O} = \text{CO}_2 + 6\text{H}^+ + 6e^- \quad E_1 = E_1^\circ + \frac{e^\circ}{6} \log \frac{P_{\text{CO}_2} h^6}{x_{\text{CH}_3\text{OH}} x_{\text{H}_2\text{O}} (c^\circ)^6 P^\circ}$$

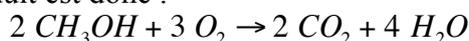
Q45. Demi-équation électronique du dioxygène :

$$\text{O}_2 + 4\text{H}^+ + 4e^- = 2\text{H}_2\text{O} \quad E_2 = E_2^\circ + \frac{e^\circ}{4} \log \frac{P_{\text{O}_2} h^4}{P^\circ (c^\circ)^4}$$

Q46. Si le courant sort de la demi-pile 2, c'est que c'est le pôle positif. Alors la demi-pile 1 est le pôle négatif, et la force électromotrice s'exprime :

$$e = E_2 - E_1 = E_2^\circ - E_1^\circ + \frac{e^\circ}{12} \log \frac{(P_{\text{O}_2})^3 (x_{\text{CH}_3\text{OH}} x_{\text{H}_2\text{O}})^2}{(P_{\text{CO}_2})^2 P^\circ}$$

Q47. Si le courant sort de la demi-pile 2, c'est que les électrons y arrivent et sont consommés. Alors il y a une réduction, la demi-pile 2 est la cathode. L'électrode 1 est donc l'anode. La réaction qui se produit est donc :



Q48. On sait que pour une mole de méthanol consommé, 6 électrons sont échangés, donc la quantité d'électricité est $Q = 6\xi F$. Calculons l'avancement, c'est-à-dire la quantité de méthanol contenue dans $v = 10,0 \text{ mL}$.

$$d = \frac{m}{v\rho_{eau}} = \frac{nM}{v\rho_{eau}} \Rightarrow n = \frac{dv\rho_{eau}}{M} = \xi.$$

$$\text{Finalement : } Q = \frac{6Fdv\rho_{eau}}{M} = \frac{6 \times 10^5 \times 0,8 \times 10,0 \times 1}{30} = \underline{\underline{1,6 \cdot 10^5 C}}$$

Si l'on admet que son rendement soit de 80%, la quantité d'électricité fournie ne sera que de 1,3.10⁵ C.

Q49. Comme l'intensité est la dérivée de la quantité d'électricité, on peut écrire, en considérant l'intensité comme constante :

$$\Delta t = \frac{Q}{I} = \frac{1,3 \cdot 10^5}{10} = 1,3 \cdot 10^4 \text{ s} \approx \underline{\underline{3,5 h}}$$

C'est l'autonomie classique d'un ordinateur portable...

Corrigé du sujet

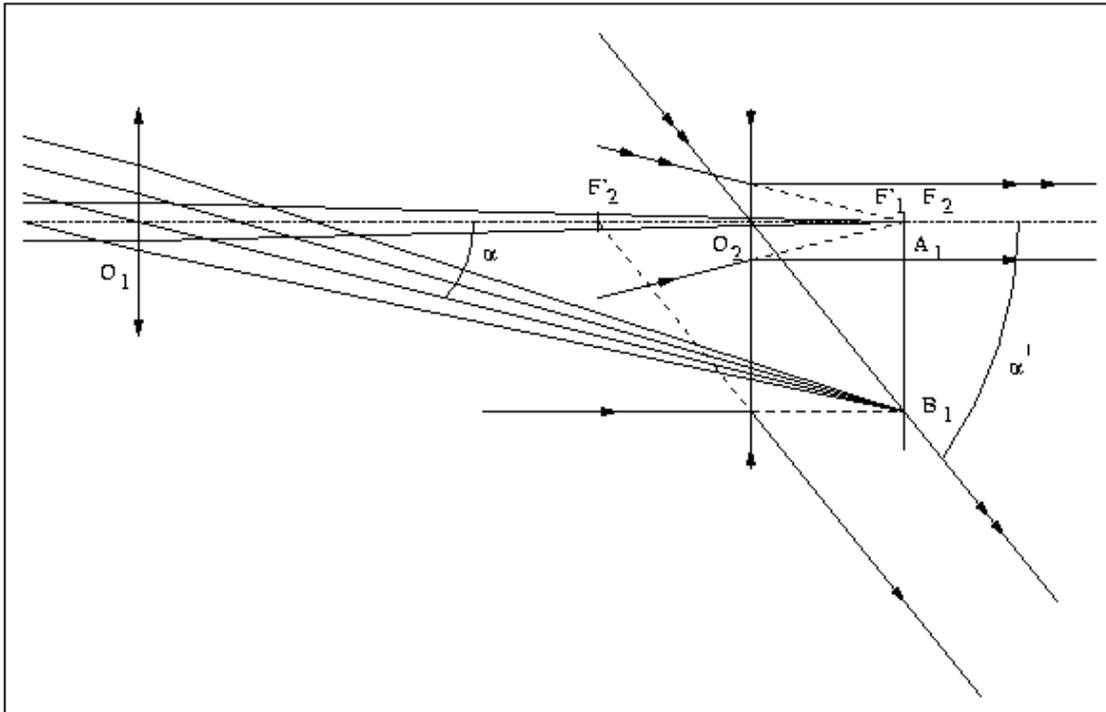
Épreuve spécifique de physique-chimie

1. Première partie : observation des anneaux de Saturne

1. Utilisation d'une lunette afocale

Question 1 $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{R_A}{D} = \frac{10^8}{1,5 \cdot 10^{12}} = 0,67 \cdot 10^{-4}$ rad (faisable sans machine).

Question 2 Le schéma final est :



A_1B_1 est une image réelle pour L_1 car à droite de O_1 (dans le demi-espace image) ; en revanche, c'est un objet virtuel pour L_2 car à droite de O_2 ; accepter aussi que les rayons ne se coupent pas ou que A_1B_1 ne peut être formée sur un écran.

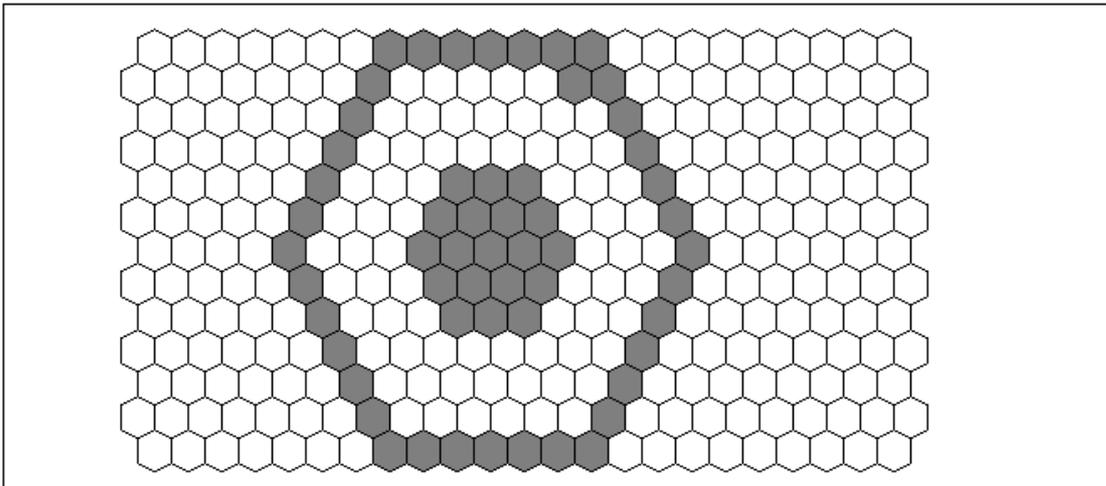
Question 3 La lunette est bien afocale car les rayons issus d'un même faisceau parallèle émergent selon un faisceau parallèle.

Question 4 On voit géométriquement sur la figure que

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \approx \tan \alpha = \frac{A_1B_1}{O_1F'_1} \\ \alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{A_1B_1}{O_2F_2} \end{array} \right\} \Rightarrow G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{O_1F'_1}{O_2F_2} = \frac{|f'_1|}{|f'_2|} = \frac{|V_2|}{|V_1|} = 5$$

Question 5 $\alpha < \alpha_0$ donc on ne peut pas distinguer les anneaux de Saturne. Avec la lunette, l'angle apparent est donc multiplié par le grossissement, d'où $\alpha' = 5\alpha = 3,3 \cdot 10^{-4}$ rad (faisable sans machine). C'est donc un peu plus de trois fois α_0 : les points sont donc distingués.

Question 6 La plaque étant dans le plan focal de la lentille, la distance entre les taches est environ $\alpha' / V_3 \approx 6,7 \cdot 10^{-6}$ m (faisable sans machine) : il y aura donc environ 6 cellules entre la cellule centrale recevant A' et la cellule recevant B' . Si on refait le même raisonnement dans toutes les directions du plan, l'image de l'anneau se formera sur les sixièmes cellules à partir du centre de l'image de la planète, d'où la figure (on acceptera quelques fluctuations sur le nombre de pixels blancs) :



On distinguera donc bien ce qui ressemble à un anneau.

2. Utilisation d'une caméra numérique

Question 7 Lorsque la contre-réaction est branchée sur E^- (étage 1), le régime est linéaire et $V_{E^+} = V_{E^-}$; lorsque la contre-réaction est branchée sur E^+ (étage 2), le régime est saturé et : si $V_{E^+} > V_{E^-}$, $V_S = +V_{SAT}$; si $V_{E^+} < V_{E^-}$, $V_S = -V_{SAT}$.

Question 8 $i^- = 0$ donc le théorème de Millmann (par exemple) appliqué en E^- donne :

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right) V_{E^-} = \frac{1}{R} V_S + \frac{1}{R_0} \cdot 0$$

D'où $U'_e = \frac{R+R_0}{R_0} U_e = \left(1 + \frac{R}{R_0} \right) U_e$.

Question 9 C'est un amplificateur non inverseur.

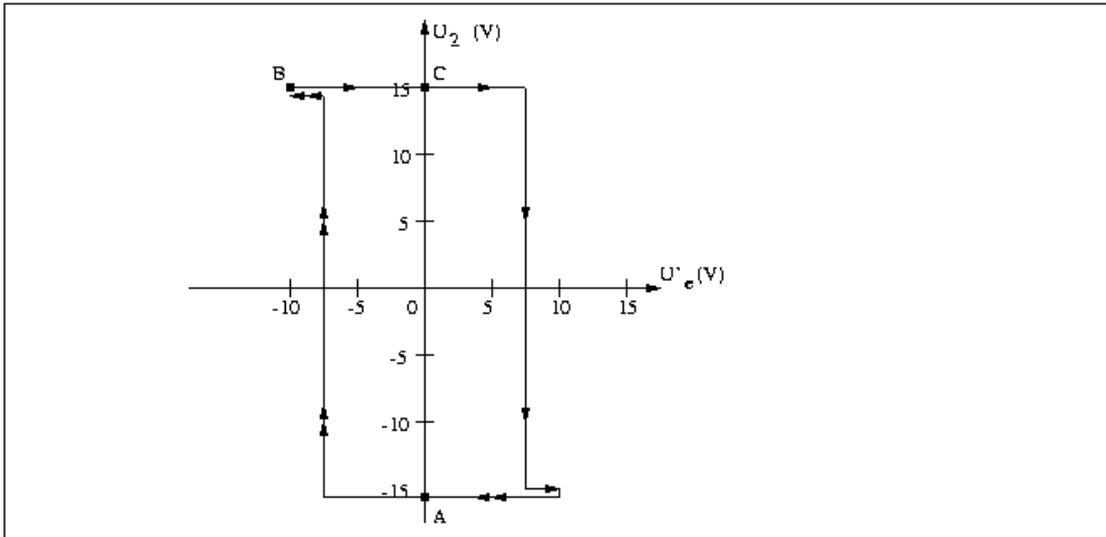
Question 10 Le rapport d'amplification doit valoir $\frac{10}{0,05} = 200$ (faisable sans machine) donc

$\frac{R}{R_0} \simeq 200$ et $R_0 = \frac{R}{200} = 250\Omega$ (faisable sans machine).

Question 11 On a ici $i^+ = 0$ donc comme au 2.(a) : $U_2 = \frac{R+R}{R} U_1 = 2U_1$.

Question 12 L'amplificateur fonctionnant en régime saturé, U_2 ne peut valoir que $+15V$ ou $-15V$, auquel cas U_1 ne peut valoir respectivement que $+7,5V$ ou $-7,5V$.

- Si U'_e vaut $-10V$, il est donc nécessairement inférieur à U_1 donc $V_{E^-} < V_{E^+}$ donc $U_2 = +V_{SAT} = +15V$ et $U_1 = +7,5V$.
- Lorsque U'_e augmente, U_2 et U_1 resteront bloquées à ces valeurs jusqu'au basculement quand V_{E^-} atteindra et dépassera V_{E^+} , donc jusqu'à ce que U'_e atteigne et dépasse $+7,5V$.
- À partir de là, U_2 bascule à $-15V$ donc U_1 à $-7,5V$.
- U'_e augmente donc jusqu'à $+10V$, puis redescend de $+10V$ à $-7,5V$ en restant supérieur à $-7,5V$, c'est-à-dire avec $V_{E^-} > V_{E^+}$, et U_2 restera donc à $-15V$.
- Lorsque U'_e passe en dessous de $-7,5V$, il y a basculement de U_2 à $+15V$ et de U_1 à $+7,5V$ jusqu'à la fin du cycle. La courbe décrit donc un cycle d'hystérésis :



Question 13 C'est un comparateur à hystérésis.

Question 14 Dans tous les cas, au début, U_e part de $0V$ et U_2 est ajustée à $-15V$: on est donc au point A du cycle.

- Si la cellule n'est pas éclairée, U_e reste à $0V$, donc U'_e aussi et la sortie du comparateur, U_2 , reste à la valeur $-15V$.
- Si la cellule est éclairée, U_e descend à $-50mV$, donc U'_e descend à $-10V$, le comparateur bascule à $+15V$ (point B) ; lors du retour de U_e à $0V$, U'_e revient à $0V$ mais U_2 reste bloqué à $+15V$.

Question 15 C'est un suiveur : $U_s = U_3$ avec $i^+ = 0$.

Question 16 Si $U_2 = -15V$, le circuit comportant le résistor et la diode est branché en inverse, donc la diode est bloquée, donc l'intensité dans R est nulle, donc $U_3 = 0$ et enfin $U_s = 0$. Si $U_2 = +15V$, le circuit comportant le résistor et la diode est branché en direct, donc la diode est passante, donc la tension à ses bornes est nulle, donc $U_3 = U_2$ et enfin $U_s = +15V$.

2. Deuxième partie : étude dynamique des anneaux de Saturne

1. Les anneaux de Saturne ne sont pas des solides

Question 17 On peut travailler dans le référentiel Sd : G y est immobile sous l'action de la force extérieure de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement axifuge, soit :

$$-\frac{Gm_s(2m)}{r^2}\vec{u}_r + (2m)\omega^2 r\vec{u}_r = \vec{0}$$

d'où l'égalité cherchée. Un raisonnement juste dans un autre référentiel sera aussi accepté.

Question 18 M_1 subit la force d'inertie d'entraînement axifuge et les forces réelles d'attraction gravitationnelle de la part de Saturne et de la part de M_2 :

$$\Sigma \vec{f} = m\omega^2(r-a)\vec{u}_r - \frac{Gm_s m}{(r-a)^2}\vec{u}_r + \frac{Gmm}{(2a)^2}\vec{u}_r$$

En utilisant l'identité précédente, il vient

$$f(a,r) = -\frac{Gm_s m}{r^2} \frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)^2} + m\omega^2 r \left(1-\frac{a}{r}\right) + \frac{Gm^2}{4a^2}$$

L'expression approchée est admise : $f(a,r) \approx -\frac{3Gm_s m a}{r^3} + \frac{Gm^2}{4a^2}$

Question 19 La condition de dislocation $f(a,r) < 0$ s'écrit donc $\frac{Gm^2}{4a^2} < \frac{3Gm_s ma}{r^3}$ soit $r < r_0 = \sqrt[3]{\frac{12m_s}{m}} = \sqrt[3]{\frac{12m_s}{\mu}}$ (μ est homogène à une masse volumique). L'application numérique

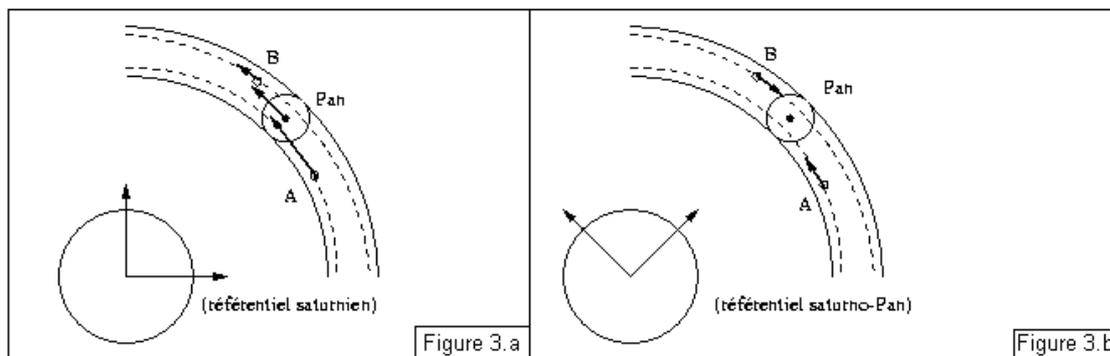
est faisable sans calculatrice : $r_0 = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 6 \cdot 10^{26}}{720}} = \sqrt[3]{10^{25}} = 10^{8,33}$ donc strictement supérieure à R_A : les anneaux ne sont donc pas des solides. Accepter aussi : les anneaux ont été obtenus par dislocation d'un solide.

2. Divisions des anneaux

Question 20 Par la troisième loi de Kepler, par exemple, il vient $\frac{(2\pi r/v)^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_s}$ donc $v^2 = \frac{Gm_s}{r}$

donc v est une fonction décroissante de r .

Question 21 $r_A < r_G < r_B$ donc $v_A > v_G > v_B$:



Question 22 Par composition des vitesses, $\vec{v}'_A = \vec{v}_A - \vec{v}_G$ et $\vec{v}'_B = \vec{v}_B - \vec{v}_G$ d'où la figure 3.b.

Question 23 Les deux directions et sens des vecteurs vitesse par rapport à Pan indiquent que A et B vont soit s'écraser sur Pan, soit rebondir sur lui, et ne peuvent donc rester sur leurs orbites : il en est de même de tous les autres corps sur la bande (sauf éventuellement pour un corps qui serait rigoureusement sur l'orbite de G , mais la moindre perturbation le ferait passer un peu plus haut ou un peu plus bas) et l'orbite est nettoyée, d'où la construction d'une division.

3. Troisième partie : étude thermodynamique de l'atmosphère de Titan

Question 24 Si m est la masse d'un système de n moles et V son volume, alors $m = nM$ et $\mu = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V}$ donc $\frac{n}{V} = \frac{\mu}{M}$. La loi des gaz parfaits s'écrit donc $PM = \mu RT$. La loi de statique des fluides s'écrit $\frac{dP}{dz} = -\mu g_T$. On en déduit $\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg_T}{RT} P$.

Question 25 C'est une équation à variables séparables qu'on intègre entre $z = z_0$ et z :

$$\int_{z_0}^z -\frac{dP}{P} = -\int_{z_0}^z \frac{Mg_T}{RT} dz \quad \text{soit} \quad [\ln P - \ln P(z_0)] = \left[\frac{Mg_T}{RT} (z - z_0) \right] \quad \text{d'où} \quad P = P(z_0) e^{\frac{Mg_T(z-z_0)}{RT}}.$$

Si cette loi est vraie, alors $\log \frac{P}{P(z_0)} = -\frac{Mg_T}{RT} (z - z_0)$ soit $\log P = \log P(z_0) - \frac{Mg_T}{RT} (z - z_0)$. Or, dans la mésosphère et la thermosphère, la température est bien à peu près constante, et l'échelle logarithmique pour la pression correspond à une échelle à peu près linéaire pour l'altitude (entre 250km et 1500km). Les données de la figure sont donc cohérentes avec ce résultat.

Question 26 $\frac{dP}{dz} = -\mu g_T$ et la loi de Laplace s'écrit $PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$ soit $P\mu^{-\gamma} = P_0 \mu_0^{-\gamma}$ soit encore

$P^{-1/\gamma} \mu = P_0^{-1/\gamma} \mu_0$. En multipliant les deux équations, on en déduit l'équation en variables séparées : $P^{-1/\gamma} dP = -P^{-1/\gamma} \mu g_T dz = -P_0^{-1/\gamma} \mu_0 g_T dz$. On l'intègre entre $z = 0$ et z :

$$P = P_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{\mu_0 g_T z}{P_0} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

On remarque que P s'annule pour $z = \frac{\gamma P_0}{(\gamma - 1) \mu_0 g_T}$ soit, en utilisant la loi des gaz parfaits,

pour $z = \frac{\gamma R T_0}{(\gamma - 1) M g_T}$. On lit la température au sol sur le diagramme : $T_0 \approx 90K$. On en déduit

l'ordre de grandeur de l'altitude maximale : $z = \frac{1,4 \times 8,3 \times 90}{0,4 \times 0,028 \times 1,6} \approx \frac{1000}{0,02} \approx 50000m = 50km$,

ce qui est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la troposphère (30km), en haut de laquelle la pression est loin d'être nulle : le résultat est donc non conforme.