Proposition de correction du sujet des Mines de Douai 2007
(épreuve commune)
Exercice de Mécanique - Planètes

réalisée par B. Louchart, professeur au lycée E. Woillez de Montreuil-sur-mer (62)
et colleur en Maths Sup MPSI et Maths Spé MP au lycée Mariette de Boulogne-sur-mer (62)

référentiel : lié à l'étoile, considéré galiléen
système : planète P

1. $\vec{f} = -\dfrac{G\,M_e\,M_P}{r^2}\,\vec{e}_r$

2. D'après le théorème du moment cinétique, $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{f}\,) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{OP} \,//\, \vec{f}$

$\Rightarrow$ $\vec{L} = \overrightarrow{OP} \wedge M_P\,\vec{v}_P$ est constant au cours du temps

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{v}_P = \vec{C}$, où $\vec{C}$ est constant

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{OP} \perp \vec{C}$

$\Rightarrow$ P se déplace dans le plan orthogonal à $\vec{C}$ passant par O

$\Rightarrow$ le mouvement est plan (plan passant par O et perpendiculaire à (Oz))

Le mouvement est circulaire $\Rightarrow$ $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

$\vec{L} = \overrightarrow{OP} \wedge M_P\,\vec{v}_P = M_P\left[r\,\vec{e}_r \wedge \left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right)\right] = M_P\,r^2\dot{\theta}\;\vec{e}_z$

$\Rightarrow$ $L = M_P\,r^2\dot{\theta}$

3.1. D'après la relation fondamentale de la dynamique, $M_p\,\vec{a} = \vec{f}$

Le mouvement est circulaire $\Rightarrow$ $r = cte = R$ $\Rightarrow$ $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\;\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\;\vec{e}_\theta$

Or $v_c = R\dot{\theta}$ $\Rightarrow$ $\vec{a} = -\dfrac{v_c^2}{R}\;\vec{e}_r + \dfrac{dv_c}{dt}\;\vec{e}_\theta$

$$\Rightarrow \quad M_p \left| \begin{array}{l} -\dfrac{v_c^2}{R} \\[2ex] \dfrac{dv_c}{dt} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} -\dfrac{G\,M_e\,M_P}{R^2} \\[2ex] 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dv_c}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_c \text{ est constante} \\[3ex] -\dfrac{M_p\,v_c^2}{R} = -\dfrac{G\,M_e\,M_P}{R^2} \quad \Rightarrow \quad v_c^2 = \dfrac{G\,M_e}{R} \quad \Rightarrow \quad v_c = \sqrt{\dfrac{G\,M_e}{R}} \end{array} \right.$$

3.2. La planète parcourt, à vitesse constante, la distance $d = 2\pi R$ pendant une durée $\Delta t = T$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2\pi R}{v_c} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\dfrac{GM_e}{R}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_e}} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_e}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_e} \qquad 3^{\text{ème}} \text{ loi de Kepler}$$

3.3. $v_c = \sqrt{\dfrac{G\,M_e}{R}} \quad \Rightarrow \quad v_c^6 = \dfrac{G^3 M_e^3}{R^3} = G^3 M_e^3 \times \dfrac{4\pi^2}{GM_e T^2} = \dfrac{4\pi^2 G^2 M_e^2}{T^2}$

$$\Rightarrow \quad v_c = \sqrt[3]{\frac{2\pi G M_e}{T}}$$

3.4. $E_c = \dfrac{1}{2} M_p v_c^2 = \dfrac{1}{2} M_p \left(\dfrac{2\pi G M_e}{T}\right)^{2/3}$

$$E_p = -\frac{G\,M_e\,M_P}{R} = -M_p\,v_c^2$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} M_p v_c^2 - M_p\,v_c^2 = -\frac{1}{2} M_p v_c^2 = -\frac{1}{2} M_p \left(\frac{2\pi G M_e}{T}\right)^{2/3}$$

4.1. $\vec{e} = -\dfrac{L}{GM_eM_p}\,\vec{v} + \vec{e}_\theta \;\Rightarrow\; \dfrac{d\vec{e}}{dt} = -\dfrac{L}{GM_eM_p}\,\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

Or $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$

et d'après la relation fondamentale de la dynamique, $M_p\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} = -\dfrac{G\,M_e\,M_P}{r^2}\,\vec{e}_r$

$$\Rightarrow \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{G\,M_e}{r^2}\,\vec{e}_r$$

On obtient donc : $\dfrac{d\vec{e}}{dt} = -\dfrac{L}{GM_eM_p} \times \left(-\dfrac{G\,M_e}{r^2}\right)\vec{e}_r - \dot{\theta}\,\vec{e}_r = \dfrac{L}{M_pr^2}\,\vec{e}_r - \dot{\theta}\,\vec{e}_r$

Or on a montré à la question 2. que $L = M_P\,r^2\,\dot{\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{d\vec{e}}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e}_r - \dot{\theta}\,\vec{e}_r = \vec{0}$

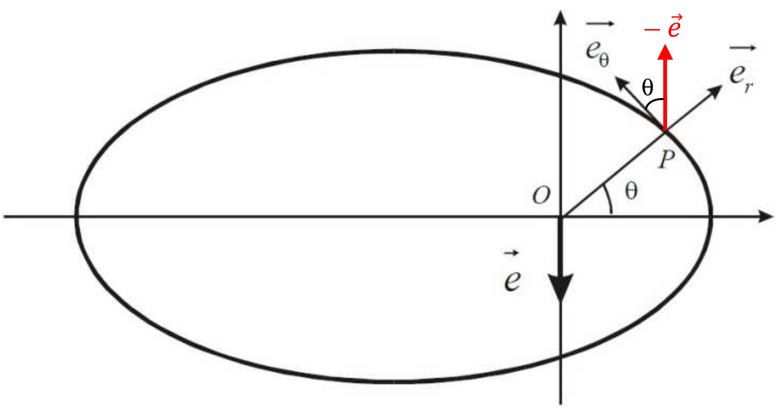
$\Rightarrow$ le vecteur $\vec{e}$ est constant

4.2.

- $\vec{e}\,.\,\vec{e}_\theta = \left(-\dfrac{L}{GM_eM_p}\,\vec{v} + \vec{e}_\theta\right).\vec{e}_\theta = -\dfrac{L}{GM_eM_p}\,\vec{v}\,.\,\vec{e}_\theta + 1 = 1 - \dfrac{L}{GM_eM_p} \times r\dot{\theta}$

Or $L = M_P\,r^2\,\dot{\theta} \;\Rightarrow\; r\dot{\theta} = \dfrac{L}{M_pr}$

On obtient ainsi : $\vec{e}\,.\,\vec{e}_\theta = 1 - \dfrac{L^2}{GM_eM_p^2r}$

- 

D'après le schéma, $(-\vec{e}).\vec{e}_\theta = e\cos\theta \Rightarrow \vec{e}.\vec{e}_\theta = -e\cos\theta$

$$\Rightarrow -e\cos\theta = 1 - \frac{L^2}{GM_eM_p^2 r} \Rightarrow 1 + e\cos\theta = \frac{L^2}{GM_eM_p^2 r}$$

$$\Rightarrow r = \frac{L^2}{GM_eM_p^2 \times (1 + e\cos\theta)}$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \quad , \quad \text{avec} \quad p = \frac{L^2}{GM_eM_p^2}$$

4.3. Pour une trajectoire circulaire, $e = 0$

4.4.

- $\vec{L} = \overrightarrow{OP} \wedge M_P\vec{v}_P$

  Pour un mouvement circulaire, à tout instant, le vecteur vitesse $\vec{v}_P$ est perpendiculaire au vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

  De plus, $r = cte = R$

  $\Rightarrow L = M_p R v_c$

- Pour un mouvement circulaire, $\vec{e} = \vec{0}$ et $\vec{v} = v_c \vec{e}_\theta \Rightarrow -\dfrac{L}{GM_eM_p} v_c \vec{e}_\theta + \vec{e}_\theta = \vec{0}$

$$\Rightarrow -\frac{L}{GM_eM_p} v_c + 1 = 0 \Rightarrow v_c = \frac{GM_eM_p}{L} = \frac{GM_eM_p}{M_pRv_c} = \frac{GM_e}{Rv_c}$$

$$\Rightarrow v_c^2 = \frac{GM_e}{R}$$

$$\Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{GM_e}{R}}$$