

SESSION 2006

Filière PC

---

PHYSIQUE PC1

ENS de Paris

---

Durée : 6 heures

---

*L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.*

---

## Quelques aspects de physique granulaire.

De nombreux matériaux se trouvent naturellement sous forme granulaire: sables, charbon, céréales, farines, poudres etc. La physique de ces milieux granulaire est donc d'une grande importance. On s'intéresse dans ce problème à quelques propriétés de ces systèmes. Le problème se décompose en trois parties largement indépendantes.

On adoptera les conventions suivantes:

- les vecteurs seront notés dans ce sujet sous la forme  $\vec{v}$ .
- la norme d'un vecteur  $\vec{v}$  est notée  $|\vec{v}|$ .
- on se place dans le référentiel du laboratoire que l'on supposera galiléen et muni du repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

- on notera l'élément de volume en coordonnées cartésiennes et sphériques respectivement:  $d\tau = dx dy dz = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr$ .

Pour simplifier, on supposera les grains sphériques, de rayon  $a$ , de masse volumique  $\rho$ , à la température  $T$  et soumis au champ de gravité terrestre  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ .

On se placera en référentiel galiléen.

On définit de plus:

- la constante de Boltzmann  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- la masse volumique des grains  $\rho = 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

On donne les valeurs des intégrales :

$$I_{2n} = \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n+1}n!}$$

et :

$$I_{2n+1} = \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{n!}{2}$$

## Partie I

### 1. Ordres de grandeurs

Un premier modèle pourrait consister à assimiler un système granulaire à un gaz parfait soumis à l'agitation thermique. Pour tester la pertinence de cette approche, nous allons commencer par estimer l'importance de l'agitation thermique pour les mouvements de grains par rapport à la gravité.

- Calculer l'énergie cinétique acquise par un grain de sable tombant de son propre diamètre.
- Par analogie avec une particule d'un gaz, donner l'énergie d'agitation thermique moyenne d'un grain en fonction de  $k_B$  et  $T$ .
- Déterminer, pour un grain de rayon un millimètre à quelle température l'agitation thermique devient importante. De même, à la température usuelle  $T = 300$  Kelvin, quels rayons faut-il atteindre pour que l'agitation thermique domine les effets de la pesanteur?
- Pour la suite du problème, on prendra  $T = 300 \text{ K}$  et la taille typique des grains considérés sera de l'ordre du millimètre. Commentez.

### 2. Collisions inélastiques

On néglige dans un premier temps les frottements et on suppose que les grains ont un moment d'inertie nul. Lors d'une collision entre deux grains, l'énergie cinétique n'est

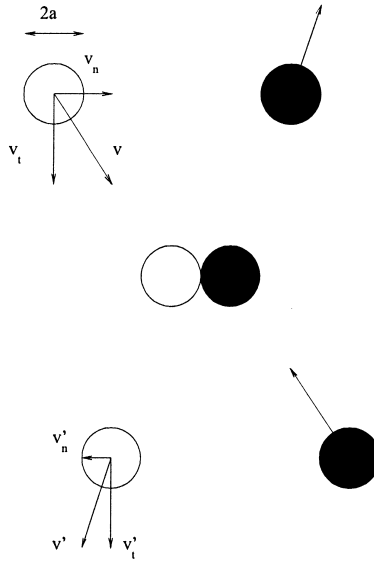


Figure 1: Illustration d'une collision inélastique dans le référentiel barycentrique entre deux billes, une blanche et une noire. Chaque bille est représentée avant la collision, au moment de la collision et après la collision. Les vitesses de la bille blanche sont indiquées par des flèches. Notez que  $v'_t = v_t$ .

pas conservée. On admettra que, dans le référentiel barycentrique, la vitesse normale de chaque grain est inversée et atténuée telle que:

$$\vec{v}'_n = -\epsilon \vec{v}_n$$

où  $\vec{v}_n$  et  $\vec{v}'_n$  sont les vitesses normales de chaque grain avant et après la collision respectivement (voir figure 1). On appelle  $\epsilon$  le coefficient de restitution que l'on suppose ne dépendre que du matériau. On prendra  $0 \leq \epsilon \leq 1$ . La vitesse tangentielle est conservée lors de l'impact.

- Quelle valeur de  $\epsilon$  devrait-on prendre dans le cas des molécules d'un gaz parfait où les collisions sont élastiques?
- Montrer que la quantité de mouvement totale est conservée lors de la collision.
- Calculer la variation d'énergie cinétique due à l'impact. A votre avis, où va l'énergie cinétique dissipée lors d'un choc inélastique?
- On considère dorénavant l'impact d'un grain seul contre un mur que l'on suppose infiniment rigide. En décomposant la vitesse de la bille suivant ses composantes normales et tangentielles au mur, justifier par un argument de symétrie que l'on peut prendre à nouveau  $\vec{v}'_n = -\epsilon \vec{v}_n$  et  $\vec{v}'_t = \vec{v}_t$ . En déduire la quantité d'énergie cinétique dissipée.
- On laisse tomber une bille initialement au repos d'une hauteur  $z = h_0$  (où  $h_0$  est la hauteur de la base de la bille, voir figure 2) sur le plan horizontal  $z = 0$ . Calculer la hauteur  $h_1$  de remontée de la bille après son rebond, ainsi que le temps  $\tau_0$  mis

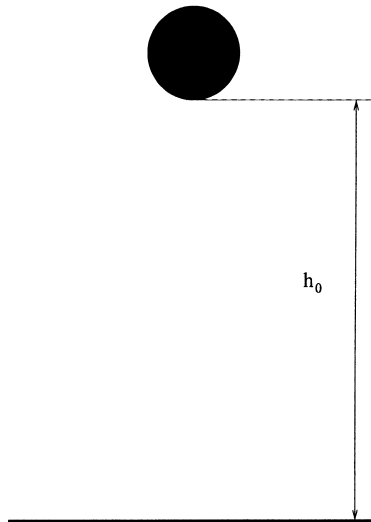


Figure 2: Bille dont la base est située à une hauteur initiale  $h_0$ .

par la bille pour effectuer la chute et la remontée en  $z = h_1$ . Calculer la quantité d'énergie cinétique dissipée.

- (f) On note  $h_n$  la hauteur maximale atteinte par la bille après  $n$  rebonds et  $\tau_n$  le temps écoulé entre les deux hauteurs  $h_n$  et  $h_{n+1}$ . Exprimer  $h_n$  et  $\tau_n$  en fonction de  $\epsilon$ ,  $h_0$  et  $\tau_0$ .
- (g) En déduire le temps  $t_n$  nécessaire pour que la bille ait effectuée  $n$  rebonds et soit à la hauteur  $h_n$ . Un collapse inélastique correspond à une situation où on observe un nombre infini de collision en un temps fini. Commenter la limite  $n \rightarrow \infty$ .
- (h) Application numérique: on laisse tomber d'une hauteur  $h_0 = 1$  m une bille en acier dont le coefficient de restitution vaut  $\epsilon = 0.9$  et un ballon de basket pour lequel le coefficient de restitution est  $\epsilon = 0.6$ . Calculer les temps au bout desquels la bille d'acier et le ballon sont immobiles respectivement.

### 3. Collapse inélastique de 3 grains sur un axe

Le collapse inélastique décrit ci-dessus pour une bille sur le sol est en fait une propriété plus générale des systèmes inélastiques. On pense par exemple qu'il joue un rôle important dans la formation des anneaux entourant certaines planètes. Le cas général comprenant de nombreux grains en collisions inélastiques est complexe et ne se traite que par simulation numérique. On va donc étudier le cas plus simple du collapse inélastique de grains identiques se déplaçant uniquement sur l'axe  $Ox$  (on néglige donc la gravité).

- (a) On étudie tout d'abord le cas général de deux billes sur l'axe  $Ox$ , de vitesse  $u_1$  et  $u_2$  quelconques entrant en collision inélastique. Calculer  $u'_1$ ,  $u'_2$  les vitesses des billes après collision en fonction de  $\epsilon$ ,  $u_1$  et  $u_2$
- (b) On considère maintenant trois grains identiques de masse  $m$  sur l'axe  $Ox$ . Dans le référentiel barycentrique, on ordonne les trois particules suivant l'ordre croissant

de leur abscisse et on suppose leur vitesse initiale  $u_1, u_2$  et  $u_3$  telles que  $u_1 > 0$ ,  $u_2 < u_3 < 0$ . Montrer qu'on aura toujours  $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ .

- (c) Quelle collision se produira en premier? En second?
- (d) Calculer  $u'_1$  et  $u'_2$  les vitesses des deux premières billes après les deux premières collisions en fonction de  $u_1$  et  $u_2$  et  $\epsilon$ .
- (e) On admettra qu'une condition suffisante pour que le collapse inélastique se produise est que la matrice de transfert entre  $(u'_1, u'_2)$  et  $(u_1, u_2)$  n'admette pas de valeur propre complexe. Montrer alors qu'on a un collapse inélastique si  $\epsilon < 7 - 4\sqrt{3}$ . *Indice: on utilisera le fait que le discriminant du polynome caractéristique de la matrice de transfert admet  $\epsilon = -1$  comme racine double.*

#### 4. Collision inélastique avec frottement

On rappelle les lois de frottement de Coulomb lorsque deux solides sont en contact. On note  $\vec{N}$  la composante normale de la force de contact et  $\vec{T}$  sa composante tangentielle. On distingue deux cas:

- s'il y a glissement relatif entre les deux solides, on a  $|\vec{T}| = \mu_d |\vec{N}|$  et  $\vec{T}$  est colinéaire à la vitesse de glissement et de sens contraire.  $\mu_d$  est le coefficient de friction dynamique.
- s'il y a roulement sans glissement, on a l'inégalité  $|\vec{T}| < \mu_s |\vec{N}|$ .  $\mu_s$  est appelé le coefficient de friction statique.

On prendra pour simplifier  $\mu_d = \mu_s = \mu$ .

On considère la collision inélastique contre un mur situé en  $x = 0$  d'une bille sphérique de masse  $m$  et de rayon  $a$  en présence de frottements. On supposera la trajectoire dans le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  et on notera  $(u, v)$  les composantes de la vitesse de la bille avant la collision et  $\omega \vec{e}_z$  son vecteur rotation. On a donc  $u < 0$  (voir figure 3). On cherche à déterminer les composantes  $(u', v')$  de la vitesse et le vecteur rotation  $\omega' \vec{e}_z$  après la collision. On notera  $\vec{P} = (X, Y)$  la quantité de mouvement échangée par la particule avec le mur lors de l'impact (par convention, il s'agit de la quantité de mouvement acquise par la bille pendant la collision). Cette quantité correspond à l'intégrale par rapport au temps des forces de contact pendant l'intervalle de temps très court de la collision.

On rappelle le moment d'inertie d'une sphère de rayon  $a$  et de masse  $m$  par rapport à un axe passant par son centre:

$$I = \frac{2}{5} m a^2$$

- (a) A partir d'un bilan de quantité de mouvement et de moment cinétique avant et après la collision, établir trois relations reliant  $u, v, u', v', \omega, \omega', X$  et  $Y$  et faisant intervenir  $m$  et  $a$ .
- (b) Combien d'inconnues doit-on déterminer? Quelles relations ou conditions doit-on rajouter? La relation entre les composantes normales de la vitesse avant et après la collision reste identique à précédemment.

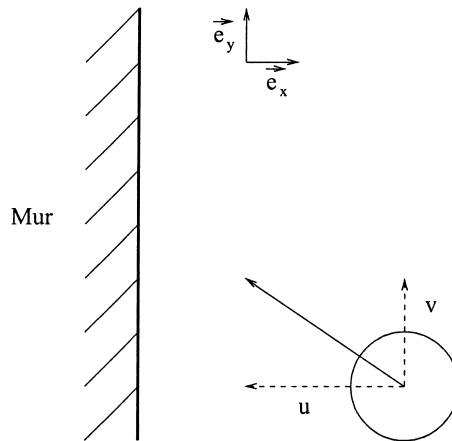


Figure 3: Collision inélastique d'une bille contre un mur avec frottement.

- (c) On se place dans le cas où il y a glissement durant toute la collision. Déterminer alors  $u'$ ,  $v'$ ,  $\omega'$ ,  $X$  et  $Y$ . *Pour simplifier, on pourra se limiter au cas où la vitesse de glissement de la bille sur le mur est du même signe que  $v$ .*
- (d) Quelle condition sur  $u$ ,  $v$  et  $\omega$  doit être satisfaite pour qu'il y ait glissement durant toute la collision?
- (e) On suppose maintenant que le mouvement devient sans glissement pendant la collision. Déterminer à nouveau  $u'$ ,  $v'$ ,  $\omega'$ ,  $X$  et  $Y$  en fonction de  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$ ,  $\epsilon$ ,  $m$  et  $a$ , ainsi que la condition que doivent satisfaire les paramètres initiaux de la collision.
- (f) Comparer les deux conditions obtenues et commenter.
- (g) Calculer la variation d'énergie cinétique lors de la collision dans les deux situations.

## Partie II

Nous cherchons à décrire un ensemble de grains fortement agités et dont la densité volumique est faible, si bien que les grains interagissent entre eux seulement par des collisions binaires. On peut retrouver ces situations lorsque l'on secoue violemment une petite quantité de grains dans un grand récipient par exemple. Les poussières interstellaires suivent aussi une dynamique similaire. On considère ici un système de  $N$  grains identiques de masse  $m$ , de rayon  $a$ , placés dans un récipient parallélépipédique de hauteur que l'on prendra infinie et de section carrée de côté  $L$ . Les parois sont supposées parfaitement élastiques sauf la paroi horizontale  $z = 0$  pour laquelle on a un coefficient de restitution  $\epsilon$ . Cette paroi horizontale vibre très rapidement et permet l'agitation permanente des grains. On néglige les frottements.

On définit la fonction de distribution  $f(\vec{r}, \vec{u}, t)$  telle que le nombre de grains situés dans un volume  $d\tau$  autour de  $\vec{r}$  et ayant une vitesse dans un volume  $d\tau_u = du_x du_y du_z$  autour de  $\vec{u}$  soit :

$$f(\vec{r}, \vec{u}, t) d\tau d\tau_u$$

On peut donc remarquer que:

$$\int d\tau \int d\tau_u f(\vec{r}, \vec{u}, t) = N$$

L'intégrale sur  $\vec{r}$  porte sur le volume du système contenant les  $N$  grains:

$$\int d\tau = \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_0^{\infty} dz.$$

L'intégrale suivant  $\vec{u}$  correspond à l'intégrale sur toutes les vitesses:

$$\int d\tau_u = \int_{-\infty}^{\infty} du_x \int_{-\infty}^{\infty} du_y \int_{-\infty}^{\infty} du_z.$$

On note ainsi la densité volumique de grains:

$$n(\vec{r}, t) = \int d\tau_u f(\vec{r}, \vec{u}, t)$$

On définit  $\langle A \rangle$  la valeur moyenne de la quantité  $A$  en  $\vec{r}$ :

$$\langle A \rangle = \frac{\int d\tau_u A(\vec{r}, \vec{u}, t) f(\vec{r}, \vec{u}, t)}{n(\vec{r}, t)}$$

### 1. Equilibre stationnaire d'une colonne granulaire vibrante

On s'intéresse au régime stationnaire. On admettra de plus que  $f(\vec{r}, \vec{u}, t)$  ne dépend en fait que de  $z$  et de  $|\vec{u}|$  et que l'on notera pour la suite  $f(z, |\vec{u}|)$ . On définit la température granulaire par :

$$T_g(z) = \frac{\langle |\vec{u}|^2 \rangle}{3}.$$

par analogie avec un gaz de particule.

- (a) Déterminer la dimension de cette température granulaire.
- (b) On considère un élément de surface élémentaire sur la paroi  $x = -L/2$  que l'on notera  $d\vec{S} = dS\vec{e}_x$  et situé autour du point  $M = (-L/2, y, z)$ . Calculer la quantité de grains entrant en collision avec cet élément de surface entre  $t$  et  $t + dt$ . On se limitera au calcul au premier ordre en  $dt$  et  $dS$ .
- (c) Calculer la quantité de mouvement reçue par l'élément de surface entre  $t$  et  $t + dt$ . En déduire la pression  $p(z)$  exercée par les grains sur la paroi en  $M$ , en fonction de  $T_g(z)$ ,  $n(z)$  et  $m$ . Quelle loi connue retrouve-t-on?
- (d) On prendra dorénavant en compte la gravité. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à une tranche de gaz granulaire comprise entre  $z$  et  $z + dz$ . Quelle loi connue retrouve-t-on? Justifier pourquoi  $\epsilon$  n'intervient pas dans cette relation.
- (e) Exprimer en  $z = 0$  la quantité d'énergie cinétique dissipée par les grains entrant en collision avec la paroi  $z = 0$  entre  $t$  et  $t + dt$  sous la forme d'une intégrale portant sur la fonction de distribution  $f(z, |\vec{u}|)$ .
- (f) On admet que la fonction de distribution prend la forme

$$f(z, |\vec{u}|) = \frac{n(z)}{(2\pi T_g(z))^{3/2}} e^{-\frac{|\vec{u}|^2}{2T_g(z)}}$$

En déduire la quantité d'énergie cinétique dissipée de la question précédente.

- (g) En régime stationnaire, cette quantité est compensée par le flux d'énergie  $Q$  transmis par la plaque vibrante aux grains en  $z = 0$ . Montrer que:

$$Q = Dn(0)L^2T(0)^{3/2}$$

où  $D$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $m$  et  $\epsilon$ .

- (h) On cherche une solution de température homogène:  $T_g(z) = T_0$ . Déterminer les solutions  $n(z)$  et  $p(z)$  en fonction de  $z, L, N, g$  et  $T_0$ . Relier  $T_0, L, Q, g, D$  et  $N$ .

## 2. Démon de Maxwell

On positionne côte à côte deux récipients identiques  $A$  et  $B$  ayant les mêmes caractéristiques que celui décrit dans la section précédente (voir figure 4) et contenant en tout  $N_0$  grains identiques de masse  $m$ . Un petit trou de surface  $S$  est percé dans la paroi commune en  $x = 0$  et à la hauteur  $z = h$ . Ce trou permet donc la communication entre les deux récipients. Chaque récipient vibre de telle sorte que le flux d'énergie transmis par la plaque vibrante en  $z = 0$  est identique pour chaque récipient et noté  $Q$ . Les récipients  $A$  et  $B$  échangent des particules au travers du trou  $S$ . On notera  $N_A(t)$  et  $N_B(t)$ ,  $T_A(t)$  et  $T_B(t)$  le nombre de grains et la température, homogène dans chaque récipient, en fonction du temps. On fait une hypothèse quasi-stationnaire qui suppose qu'à chaque instant les solutions trouvées dans la section précédente sont valables pour toutes les valeurs des  $N_A, T_A, N_B$  et  $T_B$ .

- (a) Donner une relation entre  $N_0, N_A$  et  $N_B$ .



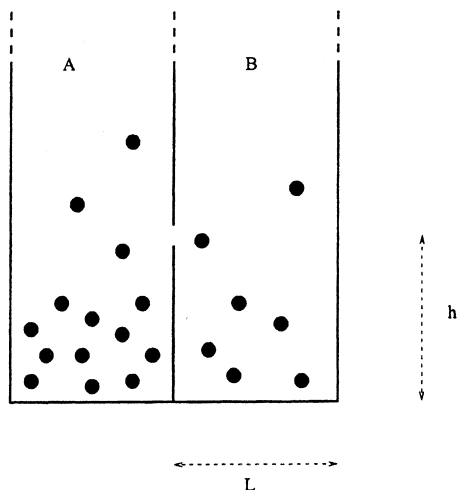


Figure 4: Récipients A et B en vibration.

- (b) Calculer le flux de grains  $F_A$  du récipient A vers B au travers de la surface  $S$  en fonction de  $S$ ,  $T_A$  et  $n(h)$ . En déduire le flux de grain  $F_B$  de B vers A.

- (c) On définit l'asymétrie du système

$$\alpha(t) = \frac{N_A - N_B}{N_0}$$

Montrer que  $\alpha$  est solution de l'équation différentielle:

$$\frac{d\alpha}{dt} = C_1 \left( (1 - \alpha)^2 e^{-C_2 \cdot (1 - \alpha)^2} - (1 + \alpha)^2 e^{-C_2 \cdot (1 + \alpha)^2} \right)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes que l'on déterminera en fonction des données du problème. Vérifier que les dimensions des constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont en accord avec l'équation différentielle.

- (d) On cherche à étudier la stabilité de la solution d'équipartition des grains  $N_A = N_B$ . On suppose donc  $\alpha \ll 1$ . A quelle condition sur  $C_2$  la solution  $\alpha = 0$  est-elle linéairement stable? On notera  $C_2^{cr}$  la valeur critique de  $C_2$  pour laquelle la solution  $\alpha = 0$  devient instable.
- (e) En développant l'équation d'évolution à l'ordre supérieur en  $\alpha$  déterminer les valeurs d'équilibre stable pour  $C_2 \sim C_2^{cr}$ .
- (f) Etudier à l'aide d'un graphique le nombre de solutions d'équilibre du système en fonction de  $C_2$ ;
- (g) Si les grains étaient des molécules d'un gaz parfait, quelle loi de la thermodynamique serait violée par les résultats obtenus? Quelle en est la raison?

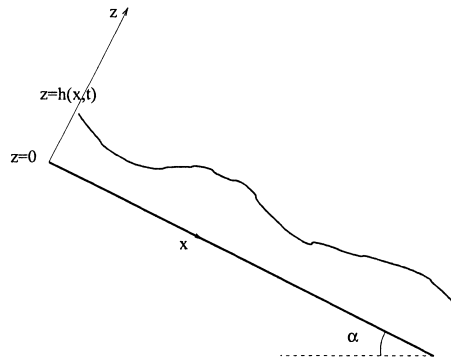


Figure 5: Ecoulement le long d'un plan incliné.

### Partie III

Une autre propriété remarquable d'un ensemble granulaire est sa capacité à "couler", dans un sablier par exemple, ou en formant des avalanches. Nous allons étudier dans cette partie l'écoulement de grains sur un plan incliné en le comparant avec l'écoulement similaire d'un film liquide. Cette partie se décompose en trois sections. La troisième section est largement indépendante des deux premières.

#### 1. Film liquide

On étudie l'écoulement d'un film liquide le long d'un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. On prendra l'axe  $x$  le long du plan incliné, l'axe  $z$  orthogonal et le système invariant par translation suivant l'axe  $y$  (voir figure 5). Le liquide est de densité constante  $\rho$  et l'écoulement est incompressible. Le champ de vitesse  $\vec{v}$  est noté suivant ses composantes  $(u(x, z, t), w(x, z, t))$  suivant les directions  $x$  et  $z$  respectivement.

L'interface entre le film liquide et l'air extérieur est décrit par la relation:

$$z = h(x, t).$$

L'air extérieur est supposé être de densité volumique négligeable et à la pression  $p_a$  constante.

On rappelle l'équation de Navier-Stokes pour le liquide:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}$$

où  $p(x, z, t)$  est la pression dans le fluide et  $\nu$  sa viscosité cinématique. On rappelle la définition usuelle des opérateurs:  $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$  et  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

(a) Quelle condition sur la vitesse doit s'appliquer en  $z = 0$ ?

- (b) On néglige la tension de surface. Les conditions aux limites sur l'interface liquide-air se traduisent en coordonnées cartésiennes par la relation matricielle en  $z = h(x, t)$ :

$$\begin{pmatrix} p_a - p + 2\rho\nu\frac{\partial u}{\partial x} & \rho\nu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \rho\nu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & p_a - p + 2\rho\nu\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à l'interface en  $z = h(x, t)$ . Exprimer  $\vec{n}$  en fonction de  $\frac{\partial h(x, t)}{\partial x}$ .

- (c) On cherche dans un premier temps la solution stationnaire d'épaisseur constante  $h_0$ , invariante par translation suivant l'axe  $x$ . En utilisant l'équation de continuité, montrer que la vitesse verticale est partout nulle.
- (d) Calculer alors les champs de vitesse  $u_0(z)$  et de pression  $p_0(z)$ .
- (e) On note  $u_{max}$  la vitesse maximale du fluide dans le film. Exprimer  $u_{max}$  en fonction des données du problème.
- (f) On donne pour l'eau  $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\nu = 8.9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Donner la vitesse  $u_{max}$  pour  $\alpha = 10$  degrés et  $h_0 = 2 \text{ cm}$ .
- (g) Déterminer le flux massique de fluide traversant une surface de hauteur  $h_0$  suivant l'axe  $z$  et de largeur 1 mètre suivant la direction  $y$  en fonction de  $u_{max}$  et  $h_0$ . Calculer la valeur de ce flux avec les données numériques précédentes.

## 2. Ondes progressives

On cherche à déterminer la vitesse de propagation des ondes à la surface d'un film de hauteur  $h_0$ . Pour cela on fera un développement au premier ordre en  $\frac{\partial h}{\partial x}$  des équations dynamiques du film. On fait donc l'hypothèse:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \ll 1$$

ce qui signifie que la longueur typique des perturbations  $L$  est bien plus grande que la hauteur moyenne du film  $h_0$ . On notera le champ de pression et le champ de vitesse:

$$p(x, z, t) = p_0(z) + p_1(x, z, t); \quad u(x, z, t) = u_0(z) + u_1(x, z, t); \quad w(x, z, t) = w_1(x, z, t).$$

On s'intéresse aux petites perturbations des champs par rapport à la solution stationnaire, soit:

$$|u_1| \ll |u_0|; \quad |w_1| \ll |u_0|; \quad |p_1| \ll |p_0|$$

pour tout le film.

- (a) En faisant un bilan de masse dans un volume infinitésimal bien choisi, montrer que l'évolution de la surface libre satisfait:

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + u(x, h(x, t), t) \cdot \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = w_1(x, h(x, t), t) \quad (1)$$

(b) On effectue les changements de variables suivants:

$$x = L \cdot x'; \quad z = h_0 \cdot z'; \quad \text{et} \quad t = \frac{L}{u_{max}} t'$$

$$u_1(x, z, t) = u_{max} \cdot u'_1(x', z', t'); \quad w_1(x, z, t) = \frac{h_0}{L} u_{max} \cdot w'_1(x', z', t')$$

$$h(x, t) = h_0 h'(x', t') \text{ et } p_1(x, z, t) = \rho g h_0 \sin(\alpha) \cdot p'_1(x', z', t').$$

Quelle est la dimension des variables primées ( $x', z', t', u'_1$ , etc...)?

(c) Exprimer le champ de vitesse  $u'_0(z')$  tel que  $u_0(z) = u_{max} \cdot u'_0(z')$

(d) Ecrire l'équation de Navier-Stokes (selon  $x$  et  $z$ ) en fonction des nouvelles variables. On fera apparaître deux nombres sans dimension:

$$\delta = \frac{h_0}{L} \quad \text{et} \quad \text{Re} = \frac{u_{max} h_0}{\nu}.$$

(e) Comment s'appelle le nombre Re ? Que signifie-t-il ? D'après les hypothèses, quelle condition a-t-on sur  $\delta$  ?

(f) On se place dans la limite visqueuse  $\text{Re} \rightarrow 0$  pour laquelle les termes inertiels sont négligeables. On suppose  $\delta$  petit et on cherche donc un développement ordre par ordre en  $\delta$  des équations. On supposera de plus dans la suite que  $u'_1, w'_1$  et leurs dérivées respectives par rapport à  $x'$  et  $z'$  sont du même ordre en  $\delta$ . Conserver pour chaque projection de l'équation de Navier-Stokes (suivant  $x$  et  $z$ ) les deux termes dominants en  $\delta$ . En déduire les relations:

$$\frac{\partial p'_1}{\partial x'} = \frac{1}{2\delta} \frac{\partial^2 u'_1}{\partial z'^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p'_1}{\partial z'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w'_1}{\partial z'^2}.$$

(g) On suppose  $u'_1$  et  $w'_1$  être du même ordre en  $\delta$ . En déduire que, à l'ordre dominant en  $\delta$  on a:

$$\frac{\partial p'_1}{\partial z'} \ll \frac{\partial p'_1}{\partial x'}$$

et donc:

$$\frac{\partial^3 u'_1}{\partial z'^3} = 0.$$

(h) Ecrire les conditions aux limites en  $z = 0$ .

(i) Ecrire les conditions aux limites en  $z' = h'(x', t')$ . Montrer qu'à l'ordre dominant en  $\delta$  on obtient:

$$p'_1(x', h'(x', t')) = (h'(x', t') - 1) \cotan(\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u'_1(x', h'(x', t'))}{\partial z'} = 2(h'(x', t') - 1).$$

(j) On cherche une solution de l'écoulement sous la forme:

$$u'_1(x', z', t') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x', t') z'^n$$

En déduire  $w'_1(x', z', t')$  sous la forme d'une série:

$$w'_1(x', z', t') = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x', t') z'^n.$$

Exprimer les  $b_n(x', t')$  en fonction des  $a_n(x', t')$ .

(k) Montrer en utilisant l'équation de Navier-Stokes à l'ordre dominant et les conditions en  $z = 0$  que les vitesses  $u'_1$  et  $w'_1$  se réduisent chacune à la somme de deux termes.

(l) A l'aide des conditions en  $z' = h'(x', t')$ , déterminer que:

$$u'_1(x', h'(x', t')) = 2h'(x', t')(h'(x', t') - 1) - \delta h'(x', t')^2 \frac{\partial h'(x', t')}{\partial x'} \cotan(\alpha)$$

et

$$w'_1(x', h'(x', t')) = -h'^2(x', t') \frac{\partial h'(x', t')}{\partial x'} + \left( \frac{\delta h'(x', t')^2}{2} \frac{\partial^2 h'^2(x', t')}{\partial x'^2} - \frac{\delta h'(x', t')^3}{3} \frac{\partial^2 h'(x', t')}{\partial x'^2} \right) \cotan(\alpha)$$

On utilisera notamment le fait qu'on peut considérer à l'ordre dominant du calcul:

$$\frac{\partial p'_1}{\partial z'} = 0$$

(m) En utilisant l'équation (1) d'évolution de la surface pour laquelle on ne conserve que les dérivées premières en  $x'$ , et en réécrivant les vitesses suivant les variables initiales, déduire la relation:

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + \frac{gh(x, t)^2 \sin(\alpha)}{\nu} \cdot \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = 0$$

(n) On étudie les petites oscillations de la surface autour de l'épaisseur  $h_0$  en utilisant la notation complexe pour la hauteur:

$$h(x, t) = h_0 + h_1 e^{i(k \cdot x - \omega \cdot t)}$$

telle que la hauteur du film corresponde à la partie réelle de  $h(x, t)$ . On se place dans la limite des petites oscillations  $|h_1| \ll |h_0|$ . Déterminer la relation de dispersion reliant  $k$ ,  $\omega$  et  $u_{max}$ . En déduire la vitesse de phase et la vitesse de groupe des oscillations.

### 3. Ecoulement granulaire

On réalise un écoulement granulaire le long d'un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale, similairement aux sections précédentes. On admettra que les conditions sur la vitesse en  $z = 0$  et  $z = h(x, t)$  sont les mêmes que pour un liquide. On cherche à déterminer la structure d'un film homogène d'épaisseur  $h_0$  en écoulement stationnaire. Le champ de vitesse se réduit à la composante selon  $x$ ,  $u(z)$ , la composante suivant  $z$  est nulle.

Dans ce cas, on admettra que la dynamique des grains obéit à l'équation différentielle:

$$0 = \nu_g a^2 \frac{d}{dz} \left( \frac{du(z)}{dz} \right)^2 + g \sin(\alpha)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp(z)}{dz} + g \cos(\alpha)$$

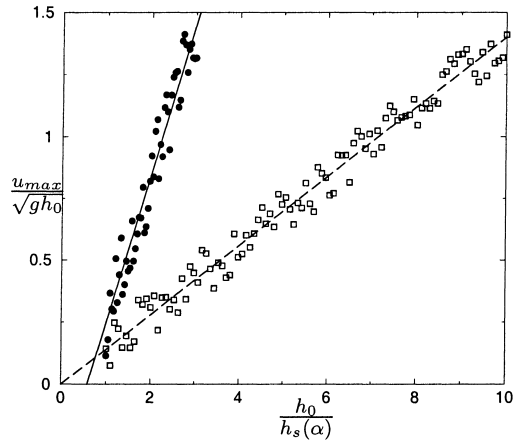


Figure 6: Mesures expérimentales de la vitesse maximale d'écoulement de grains le long d'un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale pour différentes épaisseurs de film  $h_0$ . Les cercles noirs correspondent à des mesures pour des grains de sable, les carrés blancs pour des billes de verre. Le coefficient de normalisation  $h_s(\alpha)$  permet de juxtaposer les courbes pour les valeurs différentes de l'angle  $\alpha$ .

- Quelle est la dimension du coefficient  $\nu_g$  ? Quelle en est sa signification physique?
- Déterminer le champ de vitesse  $u(z)$ . En déduire  $u_{max}$  en fonction de  $g$ ,  $a$ ,  $h_0$ ,  $\nu_g$  et  $\alpha$ .
- La figure 6 présentent des résultats expérimentaux obtenus avec des grains de sable et des billes de verres pour différentes valeurs de l'angle  $\alpha$ . Elle montre la vitesse maximale des grains  $u_{max}$  pour différentes valeurs de l'épaisseur  $h_0$ . Commenter cette figure en fonction du résultat établi ci-dessus.
- Calculer le flux de grains traversant une surface de hauteur  $h_0$  suivant l'axe  $z$  et de largeur 1 mètre suivant la direction  $y$  en fonction de  $u_{max}$  et  $h_0$ .
- On admettra la formule obtenue en (2-n) pour les films liquides valables pour les écoulements granulaires. Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe pour un film d'épaisseur  $h_0$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\nu_g$ ,  $a$ ,  $h_0$  et  $g$ . Proposer une méthode de mesure expérimentale du coefficient  $\nu_g$ .