U 422

SESSION 2004

Filière PC

PHYSIQUE

ENS de Paris

Durée : 6 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

L'objectif de ce problème est de décrire l'interaction rayonnement-interface dans le cas de la déformation d'une interface entre deux fluides par un laser. Le sujet se décompose en trois parties largement indépendantes. On se place à température constante $T = 300K$ tout au long du problème. Les vecteurs sont indiqués en caractères gras. On adoptera la notation complexe usuelle pour décrire les champs électromagnétiques: le champ physique correspond à la partie réelle du champ complexe.
En coordonnées cylindriques (r, ϕ, z), l'opérateur Laplacien d'une fonction de r uniquement s'écrit:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\left(rf'(r)\right)'$$

où on note $f'(r) = \dfrac{df}{dr}$.
On donne également les relations:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{rot}\mathbf{B}$$

où le symbole $\times$ est utilisé pour noter le produit vectoriel.
La formule du double produit vectoriel s'écrit:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

On prendra pour les applications numériques les valeurs suivantes :

Table des valeurs
masse volumique de l'air $\rho_{air} = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
masse volumique de l'eau $\rho_{eau} = 1000\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
masse volumique du mélange eau-huile lourd $\rho_1 = 904\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
masse volumique du mélange eau-huile léger $\rho_2 = 840\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
tension superficielle air/eau $\alpha_{air/eau} = 0,072\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
tension superficielle (eau-huile lourd)/(eau-huile léger) $\alpha_h = 3\cdot 10^{-7}\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
indice optique de l'air $n_{air} = 1$
indice optique de l'eau $n_{eau} = 1.33$
indice optique du mélange eau-huile lourd $n_1 = 1.457$
indice optique du mélange eau-huile léger $n_2 = 1.472$
largeur du faisceau laser $\sigma = 1,4\cdot 10^{-4}$ m.
gravité $g = 9,81\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
vitesse de la lumière $c = 3\cdot 10^{8}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
élément d'aire en coordonnées sphériques: $da = R^2\sin\theta d\theta d\phi$

1 Tension de surface

On considère deux fluides (notés F1 et F2) distincts immiscibles séparés par une interface d'aire $\mathcal{A}$.

On suppose que lors d'une transformation infinitésimale réversible l'aire de cette surface varie d'une grandeur da. Le travail des forces extérieures à la surface s'écrit alors:

$$\delta W = \alpha da$$

où le coefficient α est appelé tension superficielle. On supposera dans le problème α dépendant uniquement des caractéristiques des deux fluides.

1.1

Donner l'origine physique de ce travail.

1.2

Quelle est la dimension de la tension superficielle α? Par quelle dimension faut-il la multiplier pour obtenir une force?

1.3

En considérant la déformation plane d'un rectangle de section $l \times h$, montrer que α correspond à une force par unité de longueur s'exerçant le long de la frontière de l'interface. Quelle est la direction et le sens de cette force en chaque point de la frontière?

1.4

On suppose que l'interface F1-F2 est une sphère de rayon R. Le fluide F1 est à l'intérieur de la sphère, le système total est de volume V (voir figure 1). Les pressions dans chaque fluides sont homogènes, notées P_1 et P_2. On suppose que l'on peut négliger la gravité.

a) Calculer la variation d'énergie δE pour un changement infinitésimal δR du rayon de la sphère. Justifier que l'on a $\dfrac{\delta E}{\delta R} = 0$ à l'équilibre.

b) A l'équilibre, montrer alors qu'il existe un saut de pression entre les deux fluides appelé pression superficielle :

$$\delta P = P_1 - P_2 = \frac{2\alpha}{R} \tag{1}$$

c) Calculer la surpression à l'intérieur d'une bulle d'air de 1mm de diamètre, entourée d'eau. En déduire la surpression dans une bulle de savon de même rayon. La comparer à la pression atmosphérique. Cette bulle contient de l'air et est séparée de l'air extérieur par une membrane de rayon R et d'épaisseur δR que l'on négligera ($\delta R \ll R$). On supposera la tension de surface eau savonneuse/air égale à $\alpha_{air/eau}$.

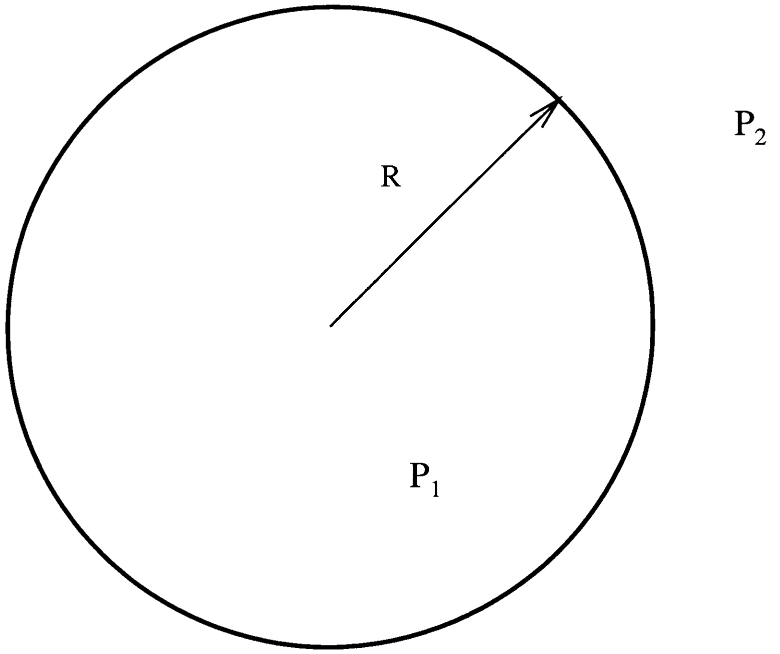

Figure 1: Bulle de rayon R du fluide F1 (pression P_1) dans le milieu F2 (pression P_2).

d) Sous quelle condition a-t-on pu négliger la gravité? Pour déterminer cette condition on calculera la variation de pression due à la gravité et liée à la différence de masse volumique entre le fluide F1 et le fluide F2. Pour une bulle d'air dans l'eau, calculer le rayon typique au dessous duquel on peut négliger la gravité.

e) On considère la même situation avec des fluides F1 et F2 très similaires, composés chacun d'un mélange eau-huile de différentes concentrations relatives. Le fluide F1, le plus lourd a pour masse volumique ρ_1 et le plus léger F2 une masse volumique notée ρ_2 (voir table des valeurs). Au dessous de quelle taille peut-on négliger la gravité pour une interface entre ces deux fluides?

1.5

Retrouver la formule (1) en considérant le bilan des forces s'exerçant sur une calotte sphérique de l'interface (voir figure 2).

1.6

a) Que devient le calcul précédent pour une interface à symétrie de révolution, donnée par $z = h(r)$? On supposera connus les champs de pression $P_1(r)$ et $P_2(r)$ de chaque côté de l'interface. On montrera donc que la pression superficielle sur une bande de rayon r vérifie:

$$\delta P = P_1(r) - P_2(r) = -\frac{\alpha}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{rh'(r)}{\sqrt{1+h'(r)^2}}\right)$$

b) Dans la limite des faibles variations de $h(r)$ ($|h'(r)| \ll 1$), que devient cette formule?

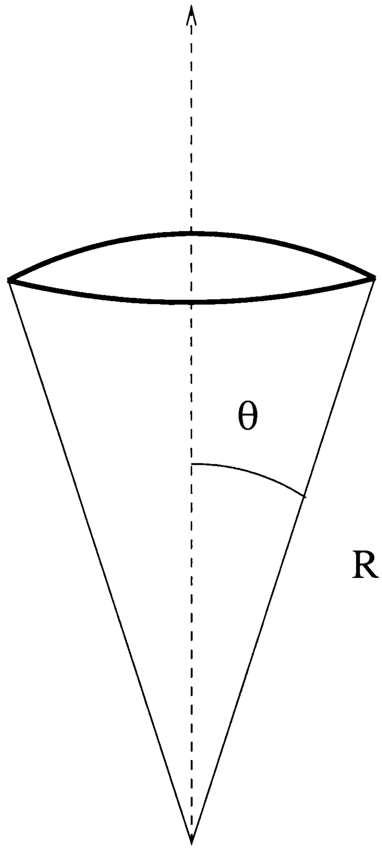

Figure 2: Schéma de la calotte de demi-angle au sommet θ. Le fluide F1 de pression P_1 est sous la calotte alors que le fluide F2 de pression P_2 est au-dessus.

2 Ondes électromagnétiques et interface

On considère un milieu diélectrique quelconque sans effets magnétiques. On appelle $\mathbf{P}$ la polarisation volumique du système. Hors les effets de polarisation du milieu, il n'y a ni charge ni courant électrique.

On note les équations de Maxwell dans ce milieu:

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = 0 \quad \mathbf{rotE} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{rotB} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{3}$$

où on a introduit $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. On rappelle de plus que c est la vitesse de la lumière dans le vide, telle que $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$.

2.1

a) Soit χ la susceptibilité diélectrique du milieu qu'on suppose indépendante de la fréquence ω de l'onde électromagnétique. Relier $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$.

b) On suppose le milieu non absorbant. Rappeler la propriété que doit satisfaire χ dans ce cas.

c) Montrer que les champs $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{P}$ satisfont dans un milieu homogène la même équation d'onde:

$$\frac{1+\chi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} = 0$$

2.2

On cherche les solutions des équations de Maxwell sous la forme $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$ avec $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ vecteurs complexes constants.

a) Donner la relation de dispersion reliant $\mathbf{k}$, ω, c et χ.

b) Quelle est la vitesse de la lumière dans le milieu? En déduire la valeur de l'indice optique n du milieu en fonction de χ.

c) Relier $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$ à l'aide de $\mathbf{k}$ et ω. On désignera de manière générale l'onde suivant la notation $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathbf{k}$ et ω.

2.3

Le vecteur de Poynting $\mathbf{P}$ s'écrit de la même manière dans un milieu diélectrique et dans le vide :

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0}$$

a) Donner la valeur instantanée du vecteur de Poynting $\mathbf{P}$ pour l'onde précédente.

b) Calculer sa valeur moyenne temporelle $\langle\mathbf{P}\rangle$ en fonction de $\mathbf{E}_0$, μ_0, $\mathbf{k}$ et ω.

c) On définit l'intensité I de l'onde comme le flux moyen d'énergie traversant une surface d'aire unité normale au vecteur de Poynting. Exprimer I en fonction de $\mathbf{E}_0$, n, μ_0 et c.

d) A partir des équations de Maxwell, retrouver la densité instantanée d'énergie électromagnétique U dans le milieu. Calculer sa valeur moyenne temporelle dans le cas de l'onde étudiée.

2.4

Les fluides F1 et F2 considérés dans la première partie sont en fait deux milieux diélectriques d'indices optiques n_1 et n_2 différents et que l'on supposera non absorbants tout au long du problème. On considère une onde électromagnétique incidente $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ traversant le milieu 1 et arrivant en incidence quasi-normale sur l'interface 1-2 d'équation $z = 0$ (voir figure 3). A la traversée de l'interface se forment une onde réfléchie $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ dans le milieu 1 et

Tournez la page S.V.P.

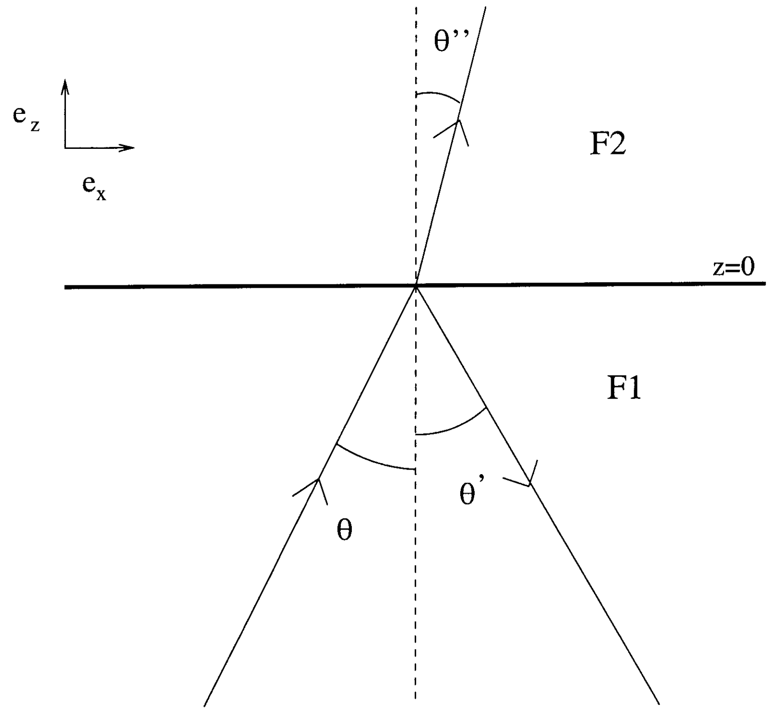

Figure 3: Schéma de la propagation d'une onde électromagnétique à l'interface F1-F2.

une onde transmise $(\mathbf{E}'', \mathbf{B}'')$ dans le milieu 2. Soit $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$ le vecteur d'onde de l'onde incidente, $\mathbf{k}' = (k'_x, 0, k'_z)$ et $\mathbf{k}'' = (k''_x, 0, k''_z)$ ceux de l'onde réfléchie et de l'onde transmise respectivement. Soit ω la pulsation commune aux trois ondes et θ, θ', θ'' les angles (comptés positivement) que font les directions de propagation des ondes avec la normale à l'interface $\mathbf{e}_z$. On se limitera dans les calculs à une incidence quasi-normale et on se contentera alors d'un développement limité au deuxième ordre suivant les angles θ.

a) Exprimer $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ et $\mathbf{k}''$ à l'aide de ω, c, n_1 ou n_2 et les différents angles θ.

b) On note $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$, $(\mathbf{E}'_0, \mathbf{B}'_0)$ et $(\mathbf{E}''_0, \mathbf{B}''_0)$ les amplitudes complexes des ondes. Ecrire le champ électromagnétique total (le champ électrique $\mathbf{E}_1$ et le champ magnétique $\mathbf{B}_1$) dans le milieu 1. Que vaut le champ $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ dans le milieu 2?

2.5

a) A partir des équations de Maxwell, écrire les conditions aux limites sur les champs à l'interface 1-2.

b) Exprimer θ' et θ'' en fonction de θ, n_1 et n_2 à partir d'une condition de a). Quels résultats connus retrouve-t-on? En déduire les expressions de $\mathbf{k}'$ et $\mathbf{k}''$.

c) On suppose les vecteurs complexes $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}'_0$ et $\mathbf{E}''_0$ dans le plan vectoriel $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$. On note E_x, E'_x et E''_x leur composante complexe suivant $\mathbf{e}_x$. Déterminer alors le champ électrique et le champ magnétique dans le milieu F1 et le milieu F2 en fonction de E_x, E'_x et E''_x, de l'angle θ, des indices n_1, n_2, de ω et de c.

d) A partir de 2.5a), relier E'_x et E''_x à E_x. Ecrire les différents champs électromagnétiques en fonction de E_x, θ, n_1 et n_2.

e) On définit les coefficients de réflexion et de transmission r et t comme les rapports E'_x/E_x et E''_x/E_x en incidence normale $\theta = 0$. Calculer r et t en fonction de n_1 et n_2.

2.6

a) Calculer le vecteur de Poynting et la densité d'énergie électromagnétique en moyennes temporelles pour chaque onde (incidente, réfléchie, transmise). Exprimer ces quantités en fonction de I, l'intensité de l'onde incidente.

b) On admettra qu'à chaque onde électromagnétique est associée une densité de flux de quantité de mouvement $\mathbf{Q}$ liée au vecteur de Poynting $\mathbf{P}$ par la relation:

$$\mathbf{Q} = \frac{n\mathbf{P}}{c}$$

Le produit du flux de ce vecteur à travers une surface S par le vecteur unitaire $\mathbf{Q}/|\mathbf{Q}|$ correspond à la quantité de mouvement par unité de temps traversant S. Faire le bilan d'impulsion moyennée temporellement à travers l'interface F1-F2. En déduire la force par unité de surface exercée par le champ électromagnétique sur l'interface.

c) On se place en incidence normale $\theta = 0$. Soit P_1 et P_2 les pressions dans chaque milieu près de l'interface. Ecrire la condition d'équilibre d'un élément de volume infinitésimal traversant l'interface. En déduire le saut de pression entre les deux milieux, appelé pression de radiation:

$$\delta P = P_1 - P_2 = \frac{2n_1(n_2 - n_1)}{c(n_1 + n_2)} I$$

où I est l'intensité de l'onde électromagnétique.

d) Que devient ce saut de pression si on considère que l'onde électromagnétique se propage du milieu 2 vers le milieu 1? Comparer son signe à celui de la situation précédente.

e) Indiquer comment varie la pression de radiation calculée au c) pour de faibles valeurs de θ.

3 Déformation d'une interface par un laser

On se place en coordonnées cylindriques (r, ϕ, z). L'interface F1-F2 située initialement en $z = 0$ est traversée par une onde électromagnétique de vecteur d'onde $k\mathbf{e_z}$ se propageant du fluide F1 vers le fluide F2 et d'intensité $I(r)$. On note ρ_1 et ρ_2 les masses volumiques des fluides F1 et F2. La gravité est orientée selon $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. Le fluide F1 est plus lourd que le fluide F2 ($\rho_1 > \rho_2$) et se situe donc initialement dans le demi-espace $z < 0$ alors que F2 occupe le demi-espace $z > 0$. L'onde électromagnétique exerce une pression qui déforme l'interface jusqu'à ce qu'un équilibre avec la gravité et la tension de surface s'établisse. Le liquide se trouve alors au repos et l'interface est donnée par $z = h(r)$. Nous allons déterminer dans cette partie la relation que satisfait cette solution statique $h(r)$. On prendra comme profil d'intensité de l'onde:

$$I(r) = \frac{2P}{\pi\sigma^2} e^{-2r^2/\sigma^2}$$

où P est la puissance de l'onde et $\sigma = 140\ \mu$m la largeur du faisceau. L'interface est non déformée dans la limite $r \to \infty$ et la pression en $z = 0$, $r \to \infty$ est notée P_0.

3.1 Condition d'équilibre

a) Calculer la pression $P_2(r)$ dans le fluide F2 en $z \to h(r)^+$ en fonction de P_0, ρ_2, g et $h(r)$.

b) Calculer de même la pression $P_1(r)$ en $z \to h(r)^-$ en fonction de P_0, ρ_1, g et $h(r)$.

c) En déduire la relation à l'équilibre pour de faibles variations de $h(r)$, où on peut alors considérer que l'onde électromagnétique est toujours en incidence normale:

$$(\rho_1 - \rho_2)gh(r) - \alpha\Delta h(r) = \frac{2n_1(n_1 - n_2)}{c(n_1 + n_2)} I(r) \tag{4}$$

3.2 Longueurs caractéristiques

On notera l l'échelle de longueur caractéristique des variations de $h(r)$.
a) Comparer les deux termes du membre de gauche de l'équation (4). En déduire la longueur typique l_c d'équilibre entre ces deux termes.

b) Quelle est la longueur typique de variation de I? Quelles formulations simplifiées de (4) peut-on prendre dans les cas $l_c/\sigma \ll 1$ et $l_c/\sigma \gg 1$?

c) Calculer l_c pour l'interface air/eau et pour l'interface entre les mélanges eau-huile. Commenter.

3.3 Equilibre gravité/laser

a) Donner la forme de l'interface $h(r)$ dans le cas $l_c/\sigma \ll 1$.

b) On notera $h_{min} = h(0)$ calculé suivant cette approximation. Calculer alors h_{min} pour un laser de puissance $P = 0,3W$ dans le cas d'une interface air/eau puis pour l'interface entre les mélanges eau-huile.

c) Tracer l'allure de l'interface $z = h(r)$.

3.4 Solution générale

Pour déterminer la solution de (4), on considère la transformée de Fourier-Bessel $\tilde{h}(k)$ telle que

$$h(r) = \int_0^\infty \tilde{h}(k) J_0(kr) k dk$$

où la fonction $J_0(r)$ satisfait l'équation:

$$\Delta J_0(r) + J_0(r) = 0$$

avec $J_0(0) = 1$. On admet de plus que:

$$\tilde{I}(k) = \frac{P}{2\pi} e^{-k^2\sigma^2/8}$$

a) Montrer alors que la fonction $h(r)$ telle que:

$$\tilde{h}(k) = \frac{2n_1(n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)(\rho_1 - \rho_2)} \frac{P}{2\pi cg} \frac{e^{-k^2\sigma^2/8}}{1 + k^2 l_c^2}$$

est solution de (4).

b) Exprimer $h(0)$ en fonction de h_{min}, du rapport l_c/σ et de la fonction

$$E_1(x) = \int_x^\infty e^{-u} \frac{du}{u}$$

c) On admet que pour $x \ll 1$, $E_1(x) \sim -\ln(x)$. Calculer alors $h(0)$ pour l'interface air/eau. Expliquer pourquoi les expériences sont réalisées avec les mélanges eau-huile.

3.5 Déformation non linéaire

Lorsque l'interface se déforme trop, on ne peut plus considérer que l'onde arrive en incidence normale sur la partie déformée de l'interface.

a) En fonction de $h'(r)$, déterminer l'angle θ que forme la normale à l'interface avec l'axe Oz.

b) Déterminer l'équation que satisfait alors $h(r)$. On se limitera toujours aux petits angles θ mais en conservant cette fois les termes d'ordre 2 en $h'(r)$ et θ.

c) Lorsque l'intensité de l'onde augmente, on observe des déformations importantes de l'interface. En particulier, on remarque pour $n_1 < n_2$ (et toujours $\rho_1 > \rho_2$), que l'interface reste stable dans le cas où l'onde se propage de F1 vers F2 alors qu'elle crée un jet très fin dans le cas inverse. En particulier, on observe que cette instabilité apparaît lorsque l'inégalité:

$$\frac{h'(r)}{\sqrt{1 + h'(r)^2}} > \frac{n_1}{n_2}$$

est satisfaite pour au moins une valeur de r. Expliquer qualitativement cet effet.

d) Calculer la puissance P_{max} nécessaire pour observer ce jet très fin dans le cadre de l'approximation de la question 3.3 pour les mélanges eau-huile.