

ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES  
ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

CONCOURS D'ADMISSION SESSION 2022

FILIÈRE BCPST  
COMPOSITION DE PHYSIQUE

Épreuve commune aux ENS de Lyon, Paris, Paris-Saclay et à l'ENPC

Durée : 4 heures

- *Le sujet de cette épreuve comprend **10** pages, numérotées de **1** à **10**.*
- *L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.*

★ ★ ★

## Mécanismes d'une propagation virale et conditions de formation d'un virus

Cette étude comprend deux parties indépendantes. La première porte sur l'étude des mécanismes physiques dont dépend la propagation d'une infection virale respiratoire telle que celle relative à la pandémie de Covid-19. La seconde s'intéresse aux conditions de formation de virus sur la base de considérations énergétiques.

→ Les applications numériques seront effectuées avec la précision qu'un calcul à la main permet aisément, et sans excéder deux chiffres significatifs. Les ordres de grandeur seront donnés avec un seul chiffre significatif. Les données numériques ont été choisies pour rendre aisés les calculs. Par ailleurs, de nombreux résultats peuvent s'obtenir à peu de frais à partir de calculs précédents.

→ Les références des questions abordées devront être indiquées de façon claire.

### 1 Étude des mécanismes physiques dont dépend une propagation virale.

L'infection par le virus SARS-CoV2, responsable de la pandémie de Covid-19, est une infection respiratoire. Elle se transmet principalement par voie aérienne, par l'intermédiaire de gouttelettes<sup>1</sup> de salive émises lorsqu'une personne infectée parle ou tousse. Avant d'étudier la dynamique de ces gouttelettes nous allons d'abord estimer quelques ordres de grandeur se rapportant au risque d'infection.

□ Nous adoptons les données numériques suivantes, pour l'ensemble de cette partie :

- Accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Viscosité dynamique de l'air :  $\eta = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- Masse volumique de l'air :  $\rho_{\text{air}} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Masse volumique de l'eau :  $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Coefficient de diffusion des molécules d'eau dans l'air :  $D_w = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
- Concentration de l'air en molécules d'eau (état de vapeur saturante) :  $c_{\text{vs}} = 1 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$
- Volume d'une molécule d'eau :  $v_w = 1 \times 10^{-29} \text{ m}^3$
- Nombre :  $\pi = 3$

#### 1.1 Paramètres conditionnant le risque d'infection.

Nous allons tout d'abord estimer la quantité de virus contenus dans l'air d'une pièce de volume  $V$ , occupée par  $p$  personnes infectées. Nous considérons que la probabilité qu'une personne saine occupant cette pièce soit infectée est proportionnelle au nombre de virus portés par les gouttelettes contenues dans l'air.

Cette étude est conduite dans le cadre suivant :

- Les gouttelettes émises par les personnes infectées sont sphériques, de mêmes rayon  $R$  et masse  $m$ , et portent la même concentration  $c_{\text{vir}}$  en virus ;
- Leur répartition est uniforme dans tout le volume  $V$ .
- Le nombre de gouttelettes émises par une personne et par unité de temps, noté  $f_{\text{em}} (\text{s}^{-1})$ , est constant.
- Chaque gouttelette reste dans l'air pendant un temps moyen  $\tau_{\text{sed}}$ . Au-delà de ce temps caractéristique, elles disparaissent, principalement suite à leur sédimentation.
- Nous envisageons toujours des situations stationnaires.

1. Les phénomènes d'émission et de sédimentation fixent, conjointement, le nombre moyen  $N_{\text{susp}}$  de gouttelettes contenues dans le volume  $V$ . Exprimer ce nombre en fonction de  $p$ ,  $f_{\text{em}}$  et  $\tau_{\text{sed}}$ .
2. En déduire l'expression, en fonction de  $p$ ,  $f_{\text{em}}$ ,  $\tau_{\text{sed}}$ ,  $c_{\text{vir}}$  et  $R$ , du nombre moyen  $N_{\text{vir}}$  de virus contenus dans l'air de la pièce.

1. Les gouttelettes de petite taille peuvent former des aérosols.

40 **3.** Pour le virus SARS-CoV-2, de très récentes études ont permis d'estimer la concentration en virus dans la salive à la valeur  $c_{\text{vir}} \simeq 10^6 \text{ (mL)}^{-1}$ . Par ailleurs, la fréquence d'émission, en parlant, est estimée à  $f_{\text{em}} \simeq 10^3 \text{ s}^{-1}$ , pour des gouttelettes de rayon moyen  $R \simeq 20 \text{ }\mu\text{m}$ . Le temps de leur sédimentation vaut approximativement  $\tau_{\text{sed}} \simeq 10^3 \text{ s}$ .

En considérant qu'une seule personne contaminée parle ( $p = 1$ ), estimer la valeur du nombre de virus contenus dans le volume  $V$ .

45 **4.** Envisageons le cas d'une pièce aérée. Nous modélisons l'effet du renouvellement d'air en considérant qu'il induit une disparition de gouttelettes selon la fréquence  $f_{\text{air}} \text{ (s}^{-1}\text{)}$ , par gouttelette.

Exprimer, en fonction de  $N_{\text{vir}}, \tau_{\text{sed}}$  et  $f_{\text{air}}$ , le nombre moyen de virus  $N'_{\text{vir}}$  contenus dans l'air, dans cette nouvelle situation (toujours pour  $p = 1$ ).

50 **5.** Estimer la valeur de  $N'_{\text{vir}}$  pour chacun des taux de disparition  $f_{\text{air}} = 5 \text{ h}^{-1}$  et  $f_{\text{air}} = 20 \text{ h}^{-1}$  (ce qui correspond à 5 et 20 renouvellements d'air complets par heure). Commenter ce résultat.

**6.** Nous notons  $V_{\text{resp}}$  le volume d'air moyen inspiré par une personne, à chaque respiration, et  $f_{\text{resp}}$  sa fréquence respiratoire.

Exprimer, en fonction de  $N_{\text{vir}}, f_{\text{resp}}, V_{\text{resp}}$  et  $V$ , le nombre moyen de virus  $\dot{N}_{\text{resp}}$  inhalés par une personne, par unité de temps.

55 Estimer la valeur de  $\dot{N}_{\text{resp}}$  (en  $(\text{min})^{-1}$ ) pour une pièce de volume  $V = (20 \text{ m}^2 \times 2 \text{ m})$ ,  $V_{\text{resp}} = 0,5 \text{ L}$ ,  $f_{\text{resp}} = 20 \text{ (min)}^{-1}$  et  $N_{\text{vir}} = 10^4$ .

**7.** Nous modélisons l'effet protecteur du port de masque en considérant que la fréquence d'émission  $f_{\text{em}}$  de gouttelettes est multipliée par un facteur  $\eta_{\text{em}}$  ( $\eta_{\text{em}} \leq 1$ ) et que le nombre moyen de virus inhalés est, parallèlement, multiplié par un facteur  $\eta_{\text{resp}}$  ( $\eta_{\text{resp}} \leq 1$ ).

Exprimer, en fonction de  $\dot{N}_{\text{resp}}, \eta_{\text{resp}}$  et  $\eta_{\text{em}}$ , le nombre moyen de virus  $\dot{N}'_{\text{resp}}$  inhalés par une personne, par unité de temps, dans ces nouvelles conditions.

Estimer la valeur de  $\dot{N}'_{\text{resp}}$  (en  $(\text{min})^{-1}$ ) pour  $\eta_{\text{em}} = \eta_{\text{resp}} = 0,5$  et les données de la question (6).

65 **8.** Dans l'état actuel des connaissances, le nombre minimal  $N^*_{\text{resp}}$  de virus devant être inhalés pour entraîner une infection, chez un individu, n'est pas connu précisément. On peut toutefois estimer que ce nombre est assez bas pour le SARS-CoV2. Nous fixons sa valeur à  $N^*_{\text{resp}} \simeq 100$ .

Exprimer, en fonction de  $N^*_{\text{resp}}$  et  $\dot{N}_{\text{resp}}$ , le temps (moyen)  $T$  nécessaire au déclenchement d'une infection.

70 Estimer sa valeur dans les deux conditions extrêmes suivantes : (1) sans aération et sans masque ; (2) avec aération ( $f_{\text{air}} = 20 \text{ h}^{-1}$ ) et masque porté par la personne infectée et les autres. On se souviendra, pour faciliter les calculs, que les derniers résultats numériques furent obtenus pour  $N_{\text{vir}} = 10^4$ .

## 1.2 Sédimentation des gouttelettes, sans évaporation.

Dans cette partie, nous nous intéressons au phénomène de sédimentation de gouttelettes d'eau dans l'air. Le phénomène d'évaporation sera, dans une première étape, négligé. Le mouvement des gouttelettes est étudié dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}(\text{O}, x, y, z)$ . Nous notons  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$  l'accélération de la pesanteur. Une gouttelette de rayon  $R$  et de masse  $m$  est émise, selon la vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ , depuis le point  $(0, 0, z_0)$ . Nous considérons que la force  $\vec{F}_v$ , que l'air exerce sur une gouttelette se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$ , s'exprime selon la relation suivante (force de STOKES) :

$$\vec{F}_v = -6\pi\eta R\vec{v} \quad \text{où } \eta \text{ représente la viscosité dynamique de l'air.} \quad (1)$$

Enfin, nous négligerons toujours la poussée d'ARCHIMÈDE agissant sur une gouttelette.

9. Dédurre, du principe fondamental de la dynamique appliqué à une gouttelette, l'équation différentielle vérifiée par chacune des composantes  $v_x$  et  $v_z$  de sa vitesse. On fera apparaître, dans chacune de ces équations, le temps caractéristique  $\tau^*$  défini par le rapport suivant :

$$\tau^* = \frac{2\rho R^2}{9\eta} \quad (2)$$

Attribuer une signification physique à cette grandeur.

- 75 10. Exprimer, en fonction de  $g$  et  $\tau^*$ , la vitesse limite de chute  $v_z^*$ . Calculer la valeur de  $|v_z^*|$  pour chacun des rayons  $R = 20 \mu\text{m}$  et  $R = 100 \mu\text{m}$ .
11. Compte tenu des résultats précédents, la relation de STOKES (équation (1)) semble-t-elle avoir été utilisée dans le bon cadre d'approximation ?
- 80 12. Exprimer la distance horizontale maximale  $x^*$  parcourue par une gouttelette. On supposera que l'altitude de lancée est suffisante pour que cette distance soit atteinte avant l'arrivée au sol.

Estimer cette distance pour  $v_0 = 100 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  et chacun des rayons  $R = 20 \mu\text{m}$  et  $R = 100 \mu\text{m}$ .

13. Établir que le temps de sédimentation  $\tau_{\text{sed}}^{(0)}$ , en négligeant le régime transitoire, s'exprime selon la relation suivante :

$$\tau_{\text{sed}}^{(0)} = \frac{z_0}{g\tau^*} \quad (3)$$

Estimer sa valeur pour  $z_0 = 2 \text{ m}$  et chacun des rayons  $R = 20 \mu\text{m}$  et  $R = 100 \mu\text{m}$ . Justifier que l'évaporation peut expliquer l'écart important entre ces valeurs et celle donnée ( $\tau_{\text{sed}} = 10^3 \text{ s}$ ) à la question (3).

### 85 1.3 Sédimentation et diffusion des gouttelettes, sans évaporation.

Le phénomène de diffusion est susceptible d'influencer le mouvement des gouttelettes d'eau de petite taille. Nous considérons que ces gouttelettes sont toutes de mêmes rayon  $R$  et masse  $m$ . Nous notons  $c = c(\vec{r}, t)$  leur concentration (nombre de gouttelettes dans l'air, par unité de volume) et  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t) [\text{L}^{-2}\text{T}^{-1}]$  le flux surfacique (ou densité de flux) caractérisant leur migration. Ces grandeurs dépendent, *a priori*, de la position  $\vec{r}$  et du temps  $t$  considérés. Le mouvement des gouttelettes est étudié dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}(\text{O}, x, y, z)$  où elles sont soumises à l'accélération de la pesanteur  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ .

Nous admettons la relation <sup>2</sup> suivante, permettant d'exprimer le coefficient de diffusion  $D_R$  des gouttelettes dans l'air en fonction, notamment, de leur rayon :

$$D_R = \frac{k_B T}{6\pi\eta R} \quad \text{où } k_B \text{ désigne la constante de BOLTZMANN et } T \text{ la température du milieu.} \quad (4)$$

14. Établir, dans le cas unidimensionnel où  $\vec{j} = j_x(x, t)\vec{e}_x$ , l'équation aux dérivées partielles liant  $c$  à  $j_x$ . On accompagnera d'un schéma le raisonnement tenu.

Dans une situation tridimensionnelle, nous admettrons que cette équation prend la forme suivante :

$$\frac{\partial c(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\text{div}\vec{j}(\vec{r}, t) \quad \text{où} \quad \text{div}\vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \quad (5)$$

---

2. Il s'agit de la relation de STOKES-EINSTEIN.

- Le mouvement de chaque gouttelette est la superposition des deux composantes suivantes :

- un mouvement diffusif induit par l'agitation thermique des molécules d'air qui exercent des forces aléatoires sur les gouttelettes ;
- un déplacement causé par le champ de gravité  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ .

La densité de flux  $\vec{j}$  est alors la somme des deux contributions correspondantes, soit :  $\vec{j} = \vec{j}_D + \vec{j}_A$  où  $\vec{j}_D$  représente la densité de flux de diffusion et  $\vec{j}_A$  celle d'advection (c'est-à-dire, ici, celle liée à l'entraînement des gouttelettes par le champ de pesanteur). Nous admettons que, dans le cas tridimensionnel, la densité de flux de diffusion  $\vec{j}_D$  est reliée à la concentration  $c$  selon la relation suivante (loi de FICK) :

$$\vec{j}_D(\vec{r}, t) = -D_R \overrightarrow{\text{grad}} c(\vec{r}, t) \quad \text{où} \quad \overrightarrow{\text{grad}} c = \frac{\partial c}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial c}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial c}{\partial z} \vec{e}_z \quad (6)$$

- 15.** Nous supposons que les gouttelettes se déplacent verticalement à la vitesse caractéristique  $v_z^*$  ( $v_z^* \leq 0$ ) constante (se reporter à la question (10)).

Exprimer la densité de flux d'advection  $\vec{j}_A(\vec{r}, t)$  en fonction de la concentration  $c(\vec{r}, t)$  et de  $v_z^*$ . Ce calcul peut, avantageusement, s'appuyer sur un schéma.

- 16.** Dédurre alors, de l'équation (5), l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la concentration  $c(\vec{r}, t)$ .

On donne la relation suivante :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \Delta f \quad (\Delta \text{ représente l'opérateur laplacien, ici appliqué à la fonction } f) \quad (7)$$

- 17.** Former une distance caractéristique  $z_*$  en dessous de laquelle nous pouvons considérer que la diffusion domine l'advection. Exprimer d'abord cette distance en fonction de  $D_R$  et  $|v_z^*|$ .

L'exprimer ensuite en fonction de  $k_B T$ ,  $g$  et la masse  $m$  d'une gouttelette. Analyser ce résultat.

Calculer la valeur de  $z_*$  pour  $R = 1 \mu\text{m}$  et  $k_B T = 4 \times 10^{-21} \text{ J}$ .

- 18.** Paraît-il alors justifié de négliger la diffusion dans l'étude de la sédimentation (étude de la partie (1.2)) ?

- Nous souhaitons maintenant estimer la distance horizontale caractéristique parcourue par les gouttelettes, par diffusion, pendant le temps de sédimentation  $\tau_{\text{sed}}$ . Nous admettons que la concentration  $c$  (solution de l'équation aux dérivées partielles advecto-diffusive établie en réponse à la question (16)) s'exprime selon la relation suivante :

$$c(x, y, z, t) = K \frac{M}{a^3} \exp(-F) \quad \text{où} \quad K = \text{Cste} \in \mathbb{R}_+ ; a = 2(D_R t)^{1/2} ; F = \frac{x^2 + y^2 + (z - z_0 - v_z^* t)^2}{a^2} \quad (8)$$

La constante  $M$  représente le nombre de gouttelettes se situant, initialement, à la position ( $x = 0, y = 0, z = z_0$ ) (il n'y en a alors nulle part ailleurs). L'équation (8) suppose, bien sûr, que l'on se place "assez loin" des parois de la pièce.

- 19.** Indiquer par quelle méthode, ou en vertu de quel principe, nous pourrions accéder à la valeur du préfacteur numérique  $K$ . Aucun calcul n'est demandé.

- 20.** Nous considérons une bague élémentaire d'axe ( $Oz$ ), située à l'altitude  $z_0$ , de volume  $d^2V = 2\pi r dr dz$  où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Exprimer le nombre  $d^2N$  de gouttelettes contenues dans cette bague, à l'instant  $t = \tau_{\text{sed}}$ . On notera  $a_{\text{sed}} = a(\tau_{\text{sed}})$ .

Déterminer le rayon  $r_*$  pour lequel  $d^2N$  est maximum. On exprimera ce résultat en fonction de  $D_R$  et  $\tau_{\text{sed}}$ .

En adoptant, pour  $\tau_{\text{sed}}$ , l'expression de  $\tau_{\text{sed}}^{(0)}$  donnée par l'équation (3) et en utilisant la relation (4), établir que  $r_*^2$  prend la forme suivante :

$$r_*^2 = 2z_* z_0 \quad (z_* \text{ est défini dans la question (17)}) \quad (9)$$

Représenter l'allure graphique de la dépendance de  $r_*$  avec  $z_0$  et la commenter brièvement.

- 21.** Calculer la valeur de  $r_*$  pour  $R = 1 \mu\text{m}$ ,  $z_0 = 2 \text{ m}$  et  $k_B T = 4 \times 10^{-21} \text{ J}$ . Analyser ce résultat.

## 1.4 Influence de l'évaporation des gouttelettes sur le temps de sédimentation.

Dans cette partie nous prenons en compte le phénomène d'évaporation qui est responsable d'échange de molécules d'eau entre les gouttelettes (de rayon  $R$  et de masse  $m$ ) et l'air ambiant contenant de l'eau en phase vapeur. Nous négligerons d'abord l'influence de la présence de virus dans les gouttelettes sur les conditions d'évaporation.

Nous cherchons à caractériser la répartition des molécules d'eau contenues dans l'air, autour d'une gouttelette, supposée seule, dont le centre  $O$  est choisi comme origine spatiale. Nous notons :  $r$  la distance du centre de la gouttelette au point  $M$  considéré de l'espace ;  $c_w = c_w(r, t)$  la concentration des molécules d'eau dans l'air (c'est-à-dire leur nombre par unité de volume) au point  $M$  ;  $c_0$  leur concentration (constante) à grande distance de la gouttelette ;  $D_w$  leur coefficient de diffusion dans l'air. La concentration  $c_w$  est alors solution de l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial c_w(r, t)}{\partial t} = D_w \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c_w(r, t)}{\partial r} \right) \quad (10)$$

22. En supposant que le processus de diffusion peut être considéré comme étant quasi-stationnaire, déterminer l'expression de la concentration  $c_w = c_w(r)$  (une constante d'intégration restant encore indéterminée).

23. Nous écrivons cette expression sous la forme suivante :

$$c_w(r) = c_0 \left( 1 + \frac{b}{r} \right) \quad \text{où } b = \text{Cste} \quad (11)$$

Exprimer la densité de flux (ou flux surfacique) de molécules d'eau  $\vec{j}_w(R)$ , au niveau de la surface de la gouttelette.

- Au niveau de la surface de la gouttelette, des molécules d'eau passent de l'état liquide à l'état gazeux, selon la densité de flux  $\vec{j}_e = k_e c_l \vec{e}_r$  où  $c_l$  représente la concentration en molécules d'eau au niveau de la surface de la gouttelette et  $k_e$  ( $k_e \geq 0$ ) un coefficient caractérisant la cinétique d'évaporation. Parallèlement, des molécules d'eau se condensent sur la surface de la gouttelette selon la densité de flux  $\vec{j}_c = -k_c c_w(R) \vec{e}_r$  où  $k_c$  ( $k_c \geq 0$ ) représente un coefficient caractérisant la cinétique de condensation.

24. En notant que  $\vec{j}_w(R)$  représente la densité de flux net d'évaporation (algébrique), établir l'égalité suivante :

$$\frac{c_0 b}{R^2} = \frac{k_e c_l - k_c c_0}{D_w + k_c R} \quad (12)$$

- En déduire, en fonction des paramètres intervenant dans le membre de droite de l'égalité (12), l'expression du flux  $J$  [ $\text{T}^{-1}$ ] de molécules d'eau traversant la surface de la gouttelette (algébriquement, en direction du milieu extérieur).

25. Les flux d'évaporation et de condensation se compensent pour une valeur particulière  $c_{vs}$  de la concentration  $c_0$  en molécules d'eau dans l'air, correspondant à un état de vapeur saturante. Par ailleurs, l'humidité relative est définie par le rapport  $H = c_0/c_{vs}$  ( $H \in [0, 1]$ ). Établir alors que le flux  $J$  prend la forme suivante :

$$J = 4\pi R^2 D_w k_c c_{vs} \frac{1 - H}{D_w + k_c R} \quad (13)$$

26. La valeur de la vitesse de condensation est estimée à  $k_c \simeq 370 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . En considérant que le rayon moyen des gouttelettes est supérieur au micromètre, justifier que l'expression du flux  $J$  peut alors s'écrire sous la forme approximative suivante :

$$J = 4\pi R D_w c_{vs} (1 - H) \quad (14)$$

C'est cette expression du flux  $J$  que nous utiliserons désormais.

**27.** Nous notons  $v_w$  le volume (effectif) d'une molécule d'eau. Établir que le rayon  $R$  de la gouttelette vérifie l'équation différentielle suivante :

$$2R \frac{dR}{dt} = -\theta(1 - H) \quad \text{où} \quad \theta = 2v_w D_w c_{vs} \quad (15)$$

**28.** Nous notons  $R(0)$  le rayon de la gouttelette à l'instant  $t = 0$ . Exprimer la solution  $R(t)$  de l'équation différentielle (15) vérifiant cette condition initiale.

**29.** Exprimer, en fonction de  $\theta$ ,  $H$  et  $R(0)$ , le temps  $\tau_{\max}$  nécessaire à l'évaporation complète d'une gouttelette.

Estimer sa valeur pour  $R(0) = 20 \mu\text{m}$  et  $H = 0,5$  (on prendra, pour les autres paramètres, les valeurs indiquées en introduction de la partie (1)).

• En réalité, une gouttelette ne s'évapore pas complètement car elle n'est pas composée d'eau pure. Elle contient des solutés, en particulier des virus, dont la présence modifie les conditions d'évaporation de la gouttelette et de condensation de la vapeur d'eau de l'air. Nous modélisons cet effet en modifiant l'expression du flux  $J$ , donnée par la relation (14), de la façon suivante :

$$J(t) = 4\pi R(t) D_w c_{vs} \{1 - H - \phi_0 f(t)\} \quad \text{où} \quad f(t) = \frac{R(0)^3}{R(t)^3} \quad (16)$$

$c_{vs}$  est la concentration en molécules d'eau dans l'air correspondant à un état de vapeur saturante, en absence de soluté, et  $\phi_0$  la fraction volumique initiale de soluté dans la gouttelette (c'est-à-dire pour  $R = R(0)$ ).

**30.** Établir que l'équation différentielle vérifiée par le rayon  $R$  prend maintenant la forme suivante :

$$\frac{2R}{1 - R_{ev}^3/R^3} \frac{dR}{dt} = -\theta(1 - H) \quad (17)$$

où  $R_{ev}$  représente un rayon caractéristique que l'on exprimera en fonction  $R(0)$ ,  $\phi_0$  et  $H$ . Nous supposons que  $R_{ev} < R(0)$ .

**31.** Représenter, sur le même graphe, l'allure de l'évolution temporelle du rayon  $R$  de la gouttelette, obtenue en réponse à la question (28), et celle correspondant à la solution de l'équation différentielle (17) (sans chercher à l'intégrer, en raisonnant simplement sur sa forme). On fera apparaître, sur ce graphe, le temps  $\tau_{\max}$  introduit dans la question (29).

Proposer une interprétation du rayon  $R_{ev}$ .

**32.** Estimer la valeur du rayon  $R_{ev}$  dans le cas d'une gouttelette de rayon initial  $R(0) = 20 \mu\text{m}$ , pour une fraction volumique de soluté  $\phi = 0,01$  et une humidité relative  $H = 0,5$ .

**33.** Nous adoptons l'équation suivante comme solution approchée de l'équation différentielle (17), pour  $t$  "pas trop proche" de  $\tau_{\max}$  (se reporter aux tracés effectués en réponse à la question (31)) :

$$R(t) = R(0) \sqrt{1 - t/\tau_{\max}} \quad (18)$$

Exprimer, en fonction de  $\tau_{\max}$  (se reporter à la question (29)),  $\phi_0$  et  $H$ , le temps  $\tau_{ev}$  nécessaire pour que le rayon d'une gouttelette atteigne  $R_{ev}$ .

• Il s'agit maintenant de tenir compte de ces résultats pour déterminer, dans un cadre plus réaliste, le temps de sédimentation. Compte tenu du résultat établi en réponse à la question (10), nous considérons qu'une gouttelette de rayon  $R$  chute à la vitesse  $v_z^*$  définie par la relation suivante :

$$v_z^* = -\frac{2g\rho R^2}{9\eta} \quad (19)$$

En outre, nous supposons que cette vitesse s'adapte "instantanément" à l'évolution du rayon de la gouttelette, au cours de son évaporation.

34. Exprimer (en utilisant la solution approchée (18)) la variation d'altitude  $\Delta z_{ev} = z_{ev} - z_0$  d'une gouttelette, émise à  $t = 0$  à une altitude  $z_0$  et avec le rayon  $R(0)$ , lorsque son rayon atteint  $R_{ev}$  (nous supposons  $z_{ev} > 0$ ). On exprimera ce résultat sous la forme suivante :

$$\Delta z_{ev} = -\Delta_0 (1 - Q^4) \quad \text{où} \quad Q = \frac{R_{ev}}{R(0)} \quad (20)$$

160

On exprimera le paramètre positif  $\Delta_0$  en fonction de  $g$ ,  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $R(0)$  et  $\tau_{\max}$ .

35. En dessous de l'altitude  $z_{ev}$ , le rayon de la gouttelette reste fixé à  $R_{ev}$ , et ce jusqu'à ce qu'elle atteigne le sol. Établir l'expression du temps total de chute  $\tau_{sed}^{(1)}$  d'une gouttelette de rayon initial  $R(0)$  et d'altitude initiale  $z_0$ . On exprimera ce résultat sous la forme suivante, en précisant la dépendance de la fonction  $G$  vis-à-vis du rapport  $Q = R_{ev}/R(0)$  :

$$\tau_{sed}^{(1)} = \tau_{sed}^{(0)}(R_{ev}) + \tau_{\max} G(Q) \quad (21)$$

Le temps  $\tau_{sed}^{(0)}$  est défini par l'équation (3), pour le rayon  $R$ .

Pour une gouttelette de rayon initial  $R(0) = 20 \mu\text{m}$ , une fraction volumique de soluté  $\phi = 0,01$  et une humidité relative  $H = 0,5$ , on obtient  $\tau_{sed}^{(1)} \simeq 10 \text{ min}$ . Commenter ce résultat au regard de celui obtenu en réponse à la question (13).

165

## 2 Conditions de formation d'un virus.

Un virus est un auto-assemblage de protéines, de lipides et, dans le cas de SARS-CoV-2, d'ARN. Dans cette partie, nous étudions les conditions qui favorisent cet assemblage, du seul point de vue énergétique.

- 170 Il s'agit d'abord de caractériser l'interaction électrostatique<sup>3</sup> entre les protéines qui composent la coque virale. Cette coque est représentée par une surface<sup>4</sup> sphérique de centre O et de rayon  $R_v$ . Nous notons :  $Q$  la charge électrique totale (positive) qu'elle porte ;  $\sigma = Q/(4\pi R_v^2)$  la charge ramenée à l'unité de surface ;  $r$  la distance entre le centre O et le point M considéré de l'espace ;  $\varepsilon$  la permittivité diélectrique de la solution dans laquelle la coque est immergée. Ce paramètre joue le rôle de  $\varepsilon_0$  lorsque le milieu est le vide.

36. La charge  $Q$  portée par la coque crée le potentiel électrostatique  $V$  dont la dépendance spatiale s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{cases} V(r) = \frac{\sigma R_v}{\varepsilon} & \text{pour } r \in [0, R_v] \\ V(r) = \frac{\sigma R_v^2}{\varepsilon r} & \text{pour } r \in [R_v, +\infty] \end{cases} \quad (22)$$

Représenter l'allure graphique de la dépendance de ce potentiel vis-à-vis du rayon  $r$ .

37. L'énergie électrostatique de la coque s'exprime par la relation suivante :

$$U_{elec} = \frac{1}{2} Q V(R_v) \quad (23)$$

Exprimer  $U_{elec}$  en fonction de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $R_v$ .

- La cohésion des protéines formant la coque du virus résulte d'un équilibre entre une répulsion électrostatique, correspondant à l'énergie  $U_{elec}$  donnée par l'équation (23), et une attraction par effet hydrophobe. L'énergie associée à cette dernière prend la forme suivante :

$$U_{hp} = -\gamma R_v^2 \quad \text{où} \quad \gamma = \text{Cste} > 0 \quad (24)$$

175

38. Représenter l'allure graphique de la dépendance de l'énergie totale  $U_{tot} = U_{elec} + U_{hp}$  d'un virus vis-à-vis de son rayon  $R_v$ .

En déduire qu'il existe un rayon privilégié  $R_v^*$  que l'on définira et exprimera en fonction de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $\gamma$ .

3. Électrostatique et électrique sont, dans toute cette étude, des termes équivalents.

4. L'épaisseur de la coque est très faible en comparaison à son rayon.

• Jusqu'à présent nous n'avons pas pris en compte la présence d'espèces ioniques en solution (à l'intérieur et à l'extérieur de la coque virale). Ces ions sont supposés de très petite taille par rapport à celle de la coque virale. La théorie de POISSON-BOLTZMANN permet de considérer leur participation par une approche à la fois électrostatique et statistique. En vertu de l'aspect statistique, les concentrations  $c_+$  et  $c_-$  des ions portant respectivement les charges  $+e$  ( $e > 0$ ) et  $-e$  en solution, dans un potentiel électrostatique  $V = V(r)$ , s'expriment selon les relations suivantes :

$$c_+(r) = c_\infty \exp\left(\frac{-eV(r)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad c_-(r) = c_\infty \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \quad (25)$$

où  $k_B$  désigne la constante de BOLTZMANN,  $T$  la température du milieu et  $c_\infty$  la concentration (identique pour les cations et les anions) à l'infini où  $V \rightarrow 0$ . La variable  $r$  représente la distance du centre O de la coque virale au point M considéré de l'espace. La figure (1) illustre cette situation.

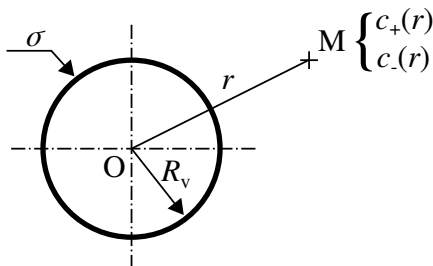


FIGURE 1 – Coque virale dans une solution ionique.

180

Dans ces conditions, le potentiel électrostatique  $V$  est solution de l'équation différentielle suivante<sup>5</sup> :

$$\Delta V(r) = \frac{2ec_\infty}{\varepsilon} \sinh\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \quad (26)$$

où  $\Delta$  représente l'opérateur laplacien (ici appliqué à  $V$ ) et  $\sinh$  la fonction sinus hyperbolique.

**39.** Indiquer dans quelle limite l'équation différentielle (26) tend vers une équation linéaire.

**40.** Nous supposons qu'en tout point de la solution la condition  $|eV(r)/(k_B T)| \ll 1$  est vérifiée. L'équation (26) prend alors la forme (approximative) suivante :

$$\Delta V(r) = \kappa^2 V(r) \quad (27)$$

Donner l'expression du paramètre<sup>6</sup>  $\kappa$  (défini positif) et préciser sa dimension.

**41.** Le potentiel défini par la fonction suivante est une solution générale de l'équation différentielle (27) :

$$V(r) = B \frac{\exp(\pm \kappa r)}{r} \quad \text{où} \quad B = \text{Cste} \quad (28)$$

Représenter l'allure graphique de la dépendance du produit  $rV(r)$  vis-à-vis du rayon  $r$ , dans le cas où  $V(r \rightarrow +\infty) = 0$ . La comparer au cas où  $c_\infty = 0$ . Proposer une interprétation du paramètre  $\kappa$ .

185

Commenter l'influence, sur la dépendance du potentiel vis-à-vis de la distance  $r$ , de la présence des espèces ioniques en solution, puis de celle de la température.

• Le potentiel  $V$  défini par les équations suivantes est la solution correspondant à la situation étudiée (charge  $Q$  immergée dans une solution ionique) :

$$\begin{cases} V(r) = W \frac{\sinh(\kappa r)}{r} & \text{pour } r \in ]0, R_v] \\ V(r) = W \sinh(u) \frac{\exp(-\kappa(r - R_v))}{r} & \text{pour } r \in [R_v, +\infty[ \end{cases} \quad (29)$$

$$\text{où } W = \frac{Q}{4\pi\varepsilon u (\sinh(u) + \cosh(u))} \quad \text{et} \quad u = \kappa R_v \quad (30)$$

5. Équation dite de POISSON-BOLTZMANN.

6. Il s'agit du paramètre de DEBYE-HÜCKEL.

**42.** Vérifier que cette solution est cohérente avec celle donnée par l'équation (22) (situation où les espèces ioniques sont absentes).

190 **43.** Représenter l'allure graphique de la dépendance du potentiel  $V$  (donnée par le système d'équations (29)) vis-à-vis du rayon  $r$ .

*Données :* Les développements limités, à l'ordre 3 et au voisinage de 0, des fonctions cosinus hyperbolique  $x \mapsto \cosh(x)$  et sinus hyperbolique  $x \mapsto \sinh(x)$ , sont les suivants :

$$\begin{cases} \cosh(x) \stackrel{(3)}{=} 1 + \frac{x^2}{2} \\ \sinh(x) \stackrel{(3)}{=} x + \frac{x^3}{6} \end{cases} \quad (31)$$

**44.** À partir du tracé réalisé en réponse à la question (43), représenter, dans un système d'axes commun, l'allure graphique de la dépendance de chacune des concentrations ioniques  $c_+$  et  $c_-$  (définies par les relations (25)) vis-à-vis du rayon  $r$ . Commenter ces tracés.

195 **45.** Nous supposons que l'énergie électrostatique totale  $U_{\text{elec,tot}}$ , c'est-à-dire tenant compte de la présence des ions en solution, s'exprime toujours selon la relation (23). Exprimer cette énergie en fonction de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\kappa$  et  $R_v$ .

**46.** Indiquer à quelle condition l'énergie électrostatique totale  $U_{\text{elec,tot}}$  peut s'écrire sous la forme approximative suivante :

$$U_{\text{elec,tot}} = \frac{\pi \sigma^2 R_v^2}{\varepsilon \kappa} \quad (32)$$

Nous nous plaçons dès lors sous cette condition.

200 **47.** Apparaît-il une taille particulière de virus favorisée, comme ce fut le cas dans la situation étudiée dans la question (38) ?

Définir la concentration ionique de seuil  $c_\infty^*$  au-delà de laquelle les virus se forment. L'exprimer en fonction de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $e$ ,  $k_B T$  et  $\gamma$  (introduit dans l'équation (24)).

- L'ARN viral présent à l'intérieur de la coque protéique modifie l'énergie totale  $U_{\text{tot}} = U_{\text{elec,tot}} + U_{\text{hp}}$  en lui apportant une contribution attractive. Celle-ci résulte de l'interaction entre la charge (positive) de la coque et celle (négative) de l'ARN. Nous admettons que cette contribution s'exprime selon la relation suivante :

$$U_{\text{ARN}} = -\frac{\pi q \sigma^3 R_v^2}{k_B T \varepsilon^2 \kappa^4 \ell^2} \quad (33)$$

où  $(-q)$  représente la charge (négative) d'un nucléotide de l'ARN et  $\ell$  sa longueur caractéristique.

48. Établir que la condition de formation du virus, en présence d'ARN, prend alors la forme suivante :

$$X > 1 - \frac{A}{X^3} \quad \text{où} \quad X = \frac{\kappa}{\kappa^*} \quad \text{et} \quad \kappa^* = \frac{\pi \sigma^2}{\varepsilon \gamma} \quad (34)$$

On exprimera la constante positive  $A$  en fonction de  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $k_B T$ ,  $q$ ,  $\kappa^*$  et  $\ell$ .

- 205 49. Traduire graphiquement l'inégalité (34) (on se placera dans le cas où  $A$  est "assez petit" pour que cette inégalité ne se trouve pas satisfaite pour tout  $X$  strictement positif). Commenter ce résultat.
50. Pour  $A$  "assez petit" (selon le sens défini dans la question (49)), la condition traduite par l'inégalité (34) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X < X^{**} \quad \text{ou} \quad X > X^* \quad (35)$$

En supposant que  $A \ll 1$  et en s'aidant du tracé effectué en réponse à la question (49), établir l'expression approchée de chacun des seuils  $X^*$  et  $X^{**}$ , en fonction de  $A$ .

- 210 51. Reproduire le graphe représenté sur la figure (2) et y situer les domaines propices à la formation des virus, d'une part sans tenir compte de la présence d'ARN, d'autre part en la considérant (toujours pour  $A \ll 1$ ).

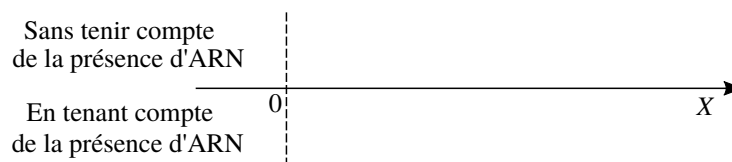


FIGURE 2 – Domaines de formation des virus, selon la valeur du paramètre  $X = \kappa/\kappa^*$  (graphe à reproduire et compléter).

*Remarque : Puisque  $X \propto (c_\infty/T)^{1/2}$ , la condition de formation des virus porte directement sur la concentration ionique et la température.*

\*\*\* Fin du sujet \*\*\*