



CONCOURS ENSAM - ESTP – ENSAIS - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Physique 1

durée 4 heures

Le problème, consacré à l'étude du **dipôle de Hertz**, comporte deux parties indépendantes : les propriétés du dipôle électrostatique (première partie) et le rayonnement du dipôle de Hertz (deuxième partie).

Remarques préliminaires importantes : il est rappelé aux candidat(e)s que

- ◀ *les explications des phénomènes étudiés, les justifications physiques interviennent dans la notation au même titre que les calculs,*
- ◀ *tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème mais ne donnent pas lieu à des questions,*
- ◀ *tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par les candidat(e)s.*

D'une façon générale, l'étude du rayonnement électromagnétique est complexe. Nous proposons dans le cadre de ce problème d'analyser le modèle simple du dipôle de Hertz.

Celui-ci conduit à une interprétation réaliste du rayonnement électromagnétique émis par des charges électriques en mouvement dans la matière. Ce modèle est très intéressant puisqu'il permet de modéliser l'émission d'ondes hertziennes par des antennes rectilignes ou encore l'émission de lumière par des gaz de faible densité selon le modèle de l'électron élastiquement lié.

Tournez la page S.V.P.

PREMIÈRE PARTIE

A - DIPOLE ELECTROSTATIQUE

I. - Propriétés du dipôle électrostatique

I.1 Rappeler la définition d'un dipôle électrostatique de moment dipolaire \vec{p} ainsi que son unité (on note $p = \|\vec{p}\|$).

Considérons le dipôle électrostatique représenté sur la figure 1 :

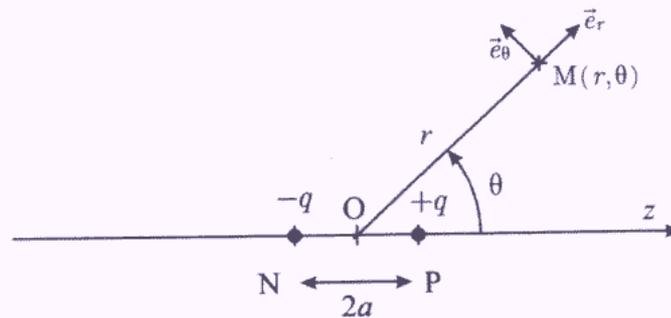


figure 1.

Dans la suite du problème, on considère : $r \gg a$, avec $2a = \|\vec{NP}\|$. Sauf mention contraire, cette distance est constante, le dipôle est dit « rigide ».

I.2.a Justifier rapidement que l'étude peut se faire dans le plan polaire repéré par les vecteurs de base $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$.

I.2.b Donner, sans calcul, l'expression de la composante du champ électrostatique (créé par cette distribution) portée par un vecteur unitaire perpendiculaire au plan d'étude.

I.2.c Déterminer, à l'ordre le plus bas en $\frac{a}{r}$, l'expression du potentiel électrostatique créé au point $M(r, \theta)$ par le dipôle, avec comme référence le potentiel nul à l'infini.

I.2.d En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en $M(r, \theta)$ par le dipôle. Montrer que celui-ci peut s'écrire sous la forme donnée par l'équation (A.1) :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}] \quad (\text{A.1})$$

I.2.e Comparer l'évolution de ce champ à celui créé par une charge ponctuelle.

I.2.f Tracer, dans un plan méridien, l'allure des lignes de champ et des équipotentielles associées à cette distribution. On tracera l'équipotentielle $V = 0$ et on indiquera les équipotentielles $V > 0$ et $V < 0$.

I.2.g Etablir les équations des lignes de champ et des équipotentielles. Vérifier, qu'en tout point, les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ.

I.2.h Que vaut le champ magnétique créé par cette distribution de charges ? Justifier rapidement votre réponse.

II. - Actions subies par un dipôle

Le dipôle précédent est placé dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique uniforme \vec{E}_0 .

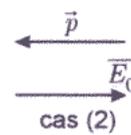
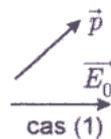
II.1 Quelle est la résultante des forces appliquées au dipôle ?

II.2 Quel est le moment résultant des actions subies par le dipôle ? Exprimer ce moment $\vec{\Gamma}$ en fonction de \vec{E}_0 et \vec{p} .

II.3 Rappeler l'expression de l'énergie potentielle \mathcal{E}_p d'une charge ponctuelle $+q$ placée en P dans une région où règne un potentiel $V(P)$.

II.4 Etablir l'expression de l'énergie potentielle \mathcal{E}_d du dipôle dans le champ uniforme \vec{E}_0 avec $2a = \|\overline{NP}\|$. Exprimer cette énergie en fonction de \vec{E}_0 et \vec{p} .

II.5 Préciser le mouvement du dipôle dans les deux cas ci-dessous ?



Le dipôle précédent est maintenant placé dans le champ créé par une charge ponctuelle $+Q$ fixe en O.

II.6.a Décrire qualitativement le mouvement du dipôle lorsqu'il est placé en M, dans les conditions initiales suivantes : $\vec{p}_{(t=0)} = p_0 \vec{e}_\theta$

et $\frac{d\vec{p}}{dt}_{(t=0)} = \vec{0}$. (figure 2)

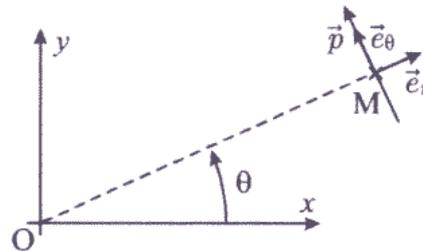


figure 2.

II.6.b Reprendre la même étude avec $\vec{p}_{(t=0)} = p_0 \vec{e}_r$ et $\frac{d\vec{p}}{dt}_{(t=0)} = \vec{0}$.

Un dipôle de moment dipolaire \vec{p} placé dans un champ non uniforme $\vec{E}(M)$ subit la résultante des forces \vec{F} donnée par la relation (A.2) :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E} \quad (\text{A.2})$$

II.7 Quelle est la force subie par un dipôle placé en M et tel que $\vec{p} = p_0 \vec{e}_r$? Quel est le mouvement du dipôle dans ce cas ?

III. - Applications

III.1 Quelle est l'unité utilisée en chimie pour caractériser le moment dipolaire d'une molécule ? Cette unité est-elle une unité du système international ?

La formule développée plane du formaldéhyde est la suivante :

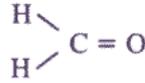


figure 3.

L'angle $\widehat{\text{HCH}}$ mesure 116° , le moment dipolaire de la liaison C – H vaut $0,40 \text{ D}$ et celui de la liaison C = O vaut $2,30 \text{ D}$.

III.2 Quelle est la valeur théorique du moment dipolaire de cette molécule ?

III.3.a Quel est le champ électrostatique créé en M par un ion fixe (en O) noté I^+ portant une charge $+Q$? On note $\|\overline{\text{OM}}\| = r$ et on utilise les coordonnées polaires.

III.3.b On place en M (avec $\|\overline{\text{OM}}\| = r \gg 2a = \|\overline{\text{NP}}\|$) un dipôle (NP) dans le champ créé par I^+ . Quelle est l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle (NP) de moment \vec{p} dans le champ créé par I^+ ? Exprimer cette énergie $\mathcal{E}_{\text{ion-dipôle}}$ en fonction de ϵ_0, Q, p, r et φ où φ est l'angle entre \vec{E}_{I^+} et \vec{p} .

III.3.c Pour $\varphi = 0$, quelle est alors la résultante des forces subies par le dipôle (NP) ? Quel est le mouvement du dipôle (NP) dans ces conditions ?

Plaçons maintenant un dipôle $(\text{NP})_2$ de moment \vec{p}_2 en M, dans le champ d'un autre dipôle fixe $(\text{NP})_1$ de moment \vec{p}_1 placé en O (voir figure 4), avec $\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = p$. On considère toujours que $\|\overline{\text{OM}}\| = r \gg 2a = \|\overline{\text{NP}}\|$.

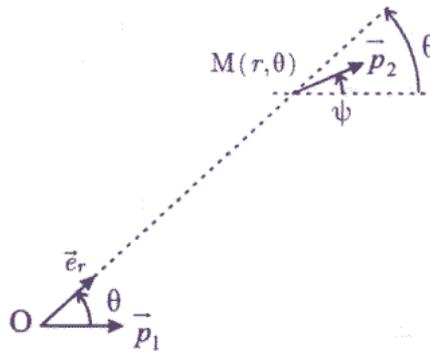


figure 4.

III.4.a Quel est le mouvement du dipôle initialement placé en M ?

III.4.b Quelle est l'énergie potentielle d'interaction $\mathcal{E}_{\text{dipôle 1-dipôle 2}}$ du dipôle 2 placé en M dans le champ d'un dipôle identique 1, placé en O ? Exprimer cette énergie en fonction de ϵ_0, p, r et ψ où ψ est l'angle entre les moments dipolaires des deux dipôles $(\text{NP})_1$ et $(\text{NP})_2$.

III.4.c Pour quelle(s) valeur(s) de ψ , les deux dipôles sont-ils en équilibre ?

Les ions d'un électrolyte en solution dans un solvant à molécules polaires (comme l'eau) s'entourent d'un certain nombre de ces molécules en raison de l'interaction charge-dipôle. Ce phénomène, appelé solvatation, contribue à la dispersion de ces ions dans le solvant. A titre d'illustration, étudions maintenant la stabilité des composés $[I(NP)]^+$ et $[I(NP)_2]^+$, constitués de l'association de l'ion I^+ et d'un ou deux dipôles (NP).

III.5.a Si le composé $[I(NP)_2]^+$ existe, quelle est la position relative des dipôles (NP) autour de l'ion I^+ ? Proposer un schéma.

Les deux dipôles sont placés dans la situation suivante (figure 5) :

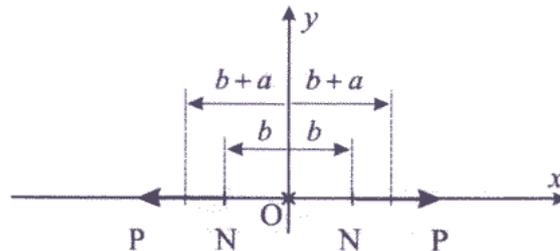


figure 5.

L'expression exacte de l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle dans le champ de l'autre, notée \mathcal{E}_{p1} , est tracée en unité arbitraire (notée u.a.) en annexe (figure 9), en fonction de b , pour quelques valeurs de a .

III.5.b Cette interaction est-elle de nature attractive ou répulsive ?

L'énergie potentielle d'interaction du dipôle (NP) dans le champ de l'ion I^+ de charge $+Q$ (supposée ponctuelle) et situé à la distance $r = b + a$ du centre de l'ion (figure 6), est notée \mathcal{E}_{p2} .

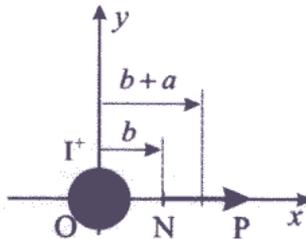


figure 6.

Cette énergie est représentée en unité arbitraire (notée u.a.) en annexe (figure 10), en fonction de b , pour quelques valeurs de a .

III.5.c Cette interaction est-elle attractive ou répulsive ? Le composé $[I(NP)]^+$ est-il stable ou instable ? Peut-on utiliser ici la relation établie en III.3.b pour conclure quant à la stabilité de ce composé ?

Tournez la page S.V.P.

L'expression exacte de l'énergie potentielle d'interaction de deux dipôles (NP) (orientés comme en figure 5) dans le champ de l'ion I^+ et situés à la distance $r = b + a$ du centre de l'ion, est notée \mathcal{E}_{p3} . Cette énergie est représentée en annexe (figure 11), en fonction de b pour quelques valeurs de a .

III.5.d Cette interaction est-elle attractive ou répulsive ? Le composé $[I(NP)_2]^+$ est-il stable ou instable ? Peut-on utiliser ici la relation établie en III.3.b pour conclure quant à la stabilité de ce composé ?

En toute rigueur il convient d'ajouter une interaction répulsive à très courte portée (représentée en pointillés sur les figures 10 et 11).

III.5.e A l'aide des courbes données en annexe, comparer les valeurs de \mathcal{E}_{p2} et \mathcal{E}_{p3} pour un ion et un type de dipôle donné. Quel composé se formera-t-il préférentiellement : $[I(NP)]^+$ ou $[I(NP)_2]^+$?

DEUXIÈME PARTIE

B. - RAYONNEMENT DIPOLAIRE

I. - Etude du dipôle oscillant

Considérons désormais un dipôle formé de la charge $-q$ fixe, située en N et de la charge $+q$ mobile, située en P et tel que :

$$NP = 2a \cos \omega t \quad (B.1)$$

ou en notation complexe,

$$\underline{NP} = 2a \exp j\omega t. \quad (B.2)$$

La charge $+q$ décrit un mouvement sinusoïdal de pulsation ω (relations (B.1) ou (B.2)). Ce modèle permet de rendre compte, en première approximation, du comportement et de l'allure du champ électromagnétique rayonné par un atome ou une molécule excités par un champ électrique harmonique, ou encore par une antenne. On se placera en coordonnées sphériques (voir figure 7).

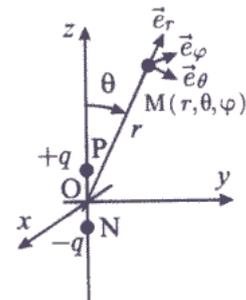


figure 7.

I.1 On suppose, comme précédemment, que la distance d'observation $r = \|\overline{OM}\|$ est grande devant a . Quelle est l'expression du moment dipolaire \vec{p} de cette distribution de charge. On pose $2aq = p_0$.

I.2.a Sachant que la charge $+q$ est animée d'un mouvement non relativiste, c'est-à-dire $v_{\max}(q) \ll c$ (c = célérité de la lumière dans le vide), quelle est l'inégalité satisfaite par la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique créée par le dipôle oscillant ?

I.2.b Pour quelles valeurs de λ l'onde électromagnétique appartient-elle au domaine visible ?

Le potentiel vecteur retardé créé par le dipôle oscillant au point M est donné par la relation (B.3) :

$$\vec{A}(M, t) = j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}{r} \vec{e}_z \quad (\text{B.3})$$

avec $\text{Re}(\vec{A}(M, t)) = \vec{A}(M, t)$, et $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_r$.

Le potentiel scalaire $V(M, t)$ créé par une telle distribution est donné, à l'ordre le plus bas en $\frac{a}{r}$, par la relation (B.4) :

$$\underline{V}(M, t) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 + j\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (\text{B.4})$$

avec $\underline{p} = p_0 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$.

I.3.a Montrer que cette expression est compatible avec celle obtenue à la question A.1.3.c, dans le cas statique.

I.3.b Le potentiel $\underline{V}(M, t)$ est écrit sous la forme d'une somme de deux termes ; donner, pour chacun d'eux l'échelle spatiale associée à r .

Le calcul du champ magnétique créé par la distribution conduit à l'expression (B.5) :

$$\vec{B}(M, t) = j\omega(1 + jkr) \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\varphi \quad (\text{B.5})$$

I.4 Que devient cette expression pour des champs lointains, c'est-à-dire pour $r \gg \lambda$?

Le calcul du champ électrostatique $\vec{E}(M, t)$, obtenu à partir de l'expression du champ en fonction des potentiels ($\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$) conduit aux relations (B.6) :

$$\begin{cases} \underline{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} 2 \cos \theta (1 + jkr) \\ \underline{E}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sin \theta (1 + jkr - (kr)^2) \\ \underline{E}_\varphi = 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

I.5.a Montrer que cette expression est compatible avec celle obtenue en A.1.3.d, dans le cas statique.

Tournez la page S.V.P.

I.5.b En déduire l'expression des composantes de $\vec{E}(M,t)$ pour des champs lointains.

I.6 A quelle condition sur l'angle θ peut-on écrire que $E_\theta \gg E_r$?

II. - Etude du rayonnement en champ lointain

Dans la suite du problème on se situera dans l'approximation des champs lointains ou zone de rayonnement ($r \gg \lambda$). Dans toute cette partie l'étude se fera en notation réelle.

II.1.a Déterminer la valeur du rapport $\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|}$.

II.1.b Ecrire les expressions de $\vec{E}(M,t)$, de $\vec{B}(M,t)$, de \vec{k} (vecteur d'onde) dans le cas d'un champ lointain ; en déduire la structure locale (en M) de l'onde rayonnée par le dipôle oscillant.

II.2.a Rappeler l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ en fonction de \vec{E} , \vec{B} et μ_0 .

II.2.b Quelle est son expression en fonction de E , c , μ_0 et d'un vecteur unitaire de la base sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$?

II.2.c Dans quelle direction l'énergie électromagnétique se propage-t-elle ?

II.2.d En optique géométrique, comment appelle-t-on les lignes de champ du vecteur de Poynting ?

II.3 Déterminer l'expression de l'intensité électromagnétique de l'onde $I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$, c'est-à-dire la moyenne temporelle (sur une période) de la norme du vecteur de Poynting, en fonction de ω , p_0 , ε_0 , c , r et θ . Quelle est l'unité de l'intensité I ?

II.4.a Pour quelle valeur de θ , la fonction $I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle$ est-elle maximale ? On note I_{\max} l'expression obtenue. Dans quelle direction la puissance rayonnée est-elle nulle ?

II.4.b Former le rapport $\frac{I}{I_{\max}}$ et tracer le diagramme polaire $\frac{I(\theta)}{I_{\max}}$ correspondant.

II.5.a Montrer que la puissance électromagnétique \mathcal{P} moyenne rayonnée dans tout l'espace par le dipôle s'écrit sous la forme suivante (B.7) :

$$\mathcal{P} = \alpha \frac{p_0^2 \omega^4}{\varepsilon_0 c^3} \quad (\text{B.7})$$

et identifier le coefficient α .

II.5.b Justifier rapidement pourquoi la puissance \mathcal{P} ne dépend pas de r .

Dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié, ce dernier oscille sous l'effet d'un champ électrique $E = E_0 \cos \omega t$. Le moment dipolaire de la molécule décrite par ce modèle est donné par la relation (B.8) :

$$p_0 = \frac{q^2 E_0}{m |\omega_0^2 - \omega^2|} \quad (\text{B.8})$$

avec $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $\omega_0 = 2,3 \cdot 10^{16}$ rad \cdot s $^{-1}$.

II.6.a Tracer l'allure de p_0 en fonction de ω .

II.6.b Le comportement du modèle retenu vous paraît-il acceptable pour $\omega = \omega_0$? Préciser le phénomène physique qui n'est pas pris en compte.

II.6.c Proposer une simplification de l'expression de p_0 , lorsque le champ électromagnétique qui excite la molécule appartient au spectre visible.

II.6.d Etablir l'expression de \mathcal{P} en fonction de $q, E_0, m, \omega_0, \omega, \epsilon_0$ et c .

II.6.e Justifier alors que la couleur dominante du ciel en plein jour et par temps clair est bleue.

II.6.f En fin de journée, lorsque le soleil se couche, il nous apparaît rouge ; expliquer qualitativement ce phénomène.

II.6.g Après traversée des nuages, la couleur du ciel ne nous apparaît plus bleue ; quelle(s) hypothèse(s), parmi celles supposées dans le problème, n'est-elle (ne sont-elles) plus vérifiée(s) ? On rappelle qu'un nuage est formé de gouttelettes d'eau ou de glace dont le diamètre est au moins de l'ordre du micromètre.

III. - Amortissement de l'intensité électromagnétique.

Dans cette partie, l'espace est repéré par les coordonnées cartésiennes. On considère une onde électromagnétique harmonique plane se propageant suivant l'axe Oz. Les expressions des champs sont données par la relation (B.9), en notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \quad (\text{B.9})$$

III.1 Rappeler les expressions des densités volumiques d'énergie électrique $u_e(t)$ et magnétique $u_m(t)$ dans le vide et les exprimer en fonction de E, B, ϵ_0 et μ_0 . Quelle relation lie ces deux densités ?

III.2 Ecrire les expressions de $u_e(t)$ et $u_m(t)$ pour cette onde électromagnétique. En déduire celle de la densité volumique totale $u(t) = u_e(t) + u_m(t)$ ainsi que sa moyenne temporelle.

III.3 Exprimer la norme du vecteur de Poynting $\|\vec{\Pi}\|$ en fonction de $u(t)$ et de la célérité de la lumière c .

III.4 Dans quelle direction l'énergie électromagnétique se propage-t-elle ?

III.5.a Quelles sont les puissances instantanée et moyenne (temporelle) qui traversent une surface S perpendiculaire à l'axe Oz ?

III.5.b En déduire l'expression de l'intensité électromagnétique de l'onde I (puissance moyenne par unité de surface transportée par cette onde électromagnétique).

Tournez la page S.V.P.

III.6 En admettant que l'énergie électromagnétique se conserve, établir l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont $u(z)$ et $\bar{\Pi}$. Montrer que $\text{div}(\bar{\Pi}) = 0$.

Considérons maintenant un cylindre de volume $d\tau$ de l'atmosphère, de section S , de longueur dz et de densité particulaire (nombre de particules par unité de volume) N_v . L'onde électromagnétique précédente se propage dans ce milieu selon Oz à la célérité c . L'intensité électromagnétique de l'onde à la cote z est notée $I(z)$. L'énergie électromagnétique est diffusée par les molécules contenues dans le volume $d\tau$. La puissance volumique électromagnétique diffusée sera notée p_d . On admettra que l'énergie électromagnétique est, soit transmise, soit diffusée par les molécules contenues dans le volume $d\tau$.

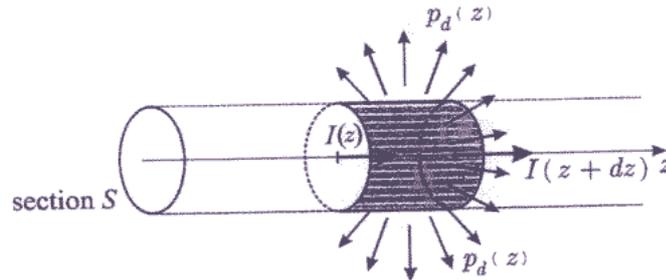


figure 8.

III.7.a Effectuer un bilan énergétique sur le volume $d\tau$. En déduire une relation entre p_d et $I(z)$ ou l'une de ses dérivées partielles.

III.7.b La puissance volumique électromagnétique diffusée est donnée par la relation (B.10) :

$$p_d(z) = \frac{I(z)}{h(\omega)}, \text{ en posant } h(\omega) = \frac{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4}{N_v q^4} \left(\frac{\omega_0^4}{\omega^4} \right) \quad (\text{B.10})$$

avec $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$, $q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

En déduire une équation aux dérivées partielles satisfaite par $I(z)$.

III.7.c Intégrer cette équation, en notant $I(0) = I_0$.

III.7.d Préciser la signification physique ainsi que l'unité de $h(\omega)$.

III.7.e En considérant que l'atmosphère se comporte comme un gaz parfait à la température $T_0 = 290 \text{ K}$, sous la pression $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, calculer la densité particulaire N_v de l'atmosphère.

Données : $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

III.7.f Evaluer l'épaisseur $h_{50\%}(\omega_{\text{bleue}})$ telle que l'intensité lumineuse correspondant à la couleur bleue soit divisée par deux. En déduire l'épaisseur comparable $h_{50\%}(\omega_{\text{rouge}})$ pour la couleur rouge. Analyser les résultats obtenus.

III.7.g Critiquer les hypothèses faites dans cette partie de l'énoncé pour mener cette étude.

ANNEXE

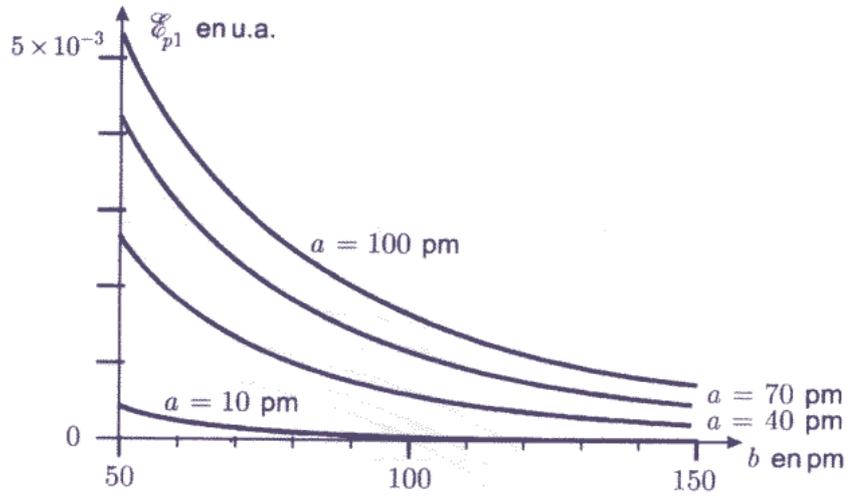


figure 9.

Evolution de \mathcal{E}_{p1} en fonction de b (b de 50 à 150 pm).

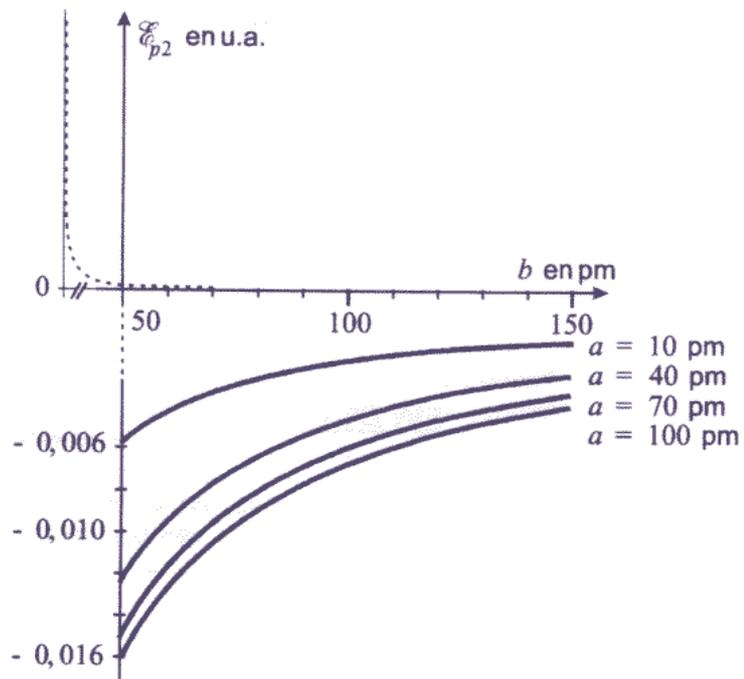
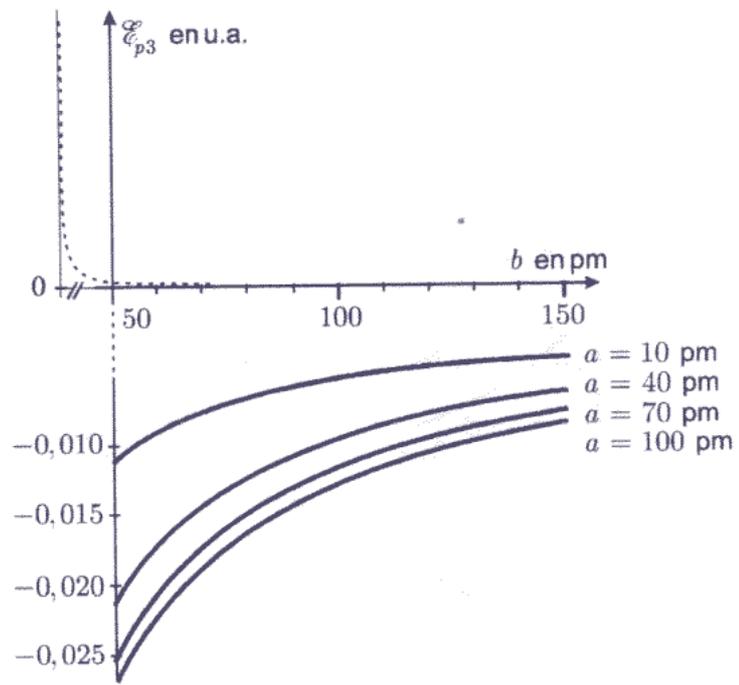


figure 10.

Evolution de \mathcal{E}_{p2} en fonction de b (b de 50 à 150 pm).

Tournez la page S.V.P.



Evolution de ε_{p3} en fonction de b (b de 50 à 150 pm).

figure 11.

FIN DE L' EPREUVE