PHYSIQUE II

On se propose d'examiner quelques principes de fonctionnement de deux types de moteurs électriques, à la fois sous les aspects électromagnétique et dynamique. Les trois parties de ce problème sont indépendantes. L'étude est réalisée dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ auquel on associe un repère $Oxyz$ (de vecteurs unitaires respectifs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

Partie I - Moteur à aimant inducteur

Un segment conducteur filiforme rectiligne AD, de résistance négligeable, parcouru par un courant i (dirigé de A vers D), est astreint à tourner autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante ω, dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps : $\vec{B} = -B\vec{e}_z (B > 0)$.

Les points O, A, et D sont toujours alignés et on appelle $\vec{e}_r$ le vecteur unitaire radial dirigé selon OA : on pose $\theta = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$ et donc $\omega = d\theta/dt$.

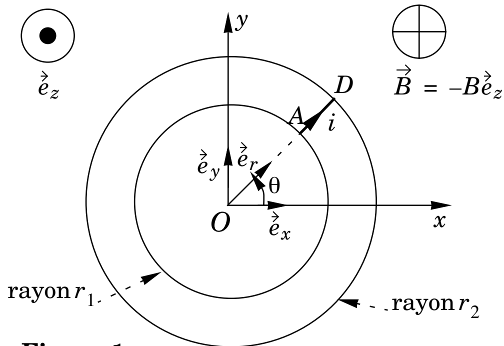


Figure 1

Les deux extrémités A et D du segment glissent sur deux conducteurs circulaires fixes, de centre O, de rayons respectifs r_1 et r_2 $(r_1 < r_2)$, de résistance négligeable, qui permettent de collecter le courant i (figure 1).

I.A - Calculer la f.e.m. e_{AD} induite qui apparaît aux extrémités du segment AD en fonction de B, r_1, r_2 et ω.

I.B - Calculer le moment en O de la force de Laplace, soit $\vec{\Gamma}_1 = \Gamma_1\vec{e}_z$, qui s'exerce sur AD en fonction de B, r_1, r_2 et i.

I.C - À présent, on considère une nappe conductrice formée de N segments conducteurs identiques à AD, placés dans le plan Oxy et régulièrement

Filière TSI

distribués autour de l'axe Oz. Le système rigide ainsi constitué tourne autour de l'axe Oz avec la vitesse angulaire uniforme $\omega = d\theta/dt$.

I.C.1) Quelle est l'expression de la f.e.m $e_{1 \to 2}$ qui apparaît entre les deux conducteurs circulaires ?

I.C.2) Chaque segment conducteur étant parcouru par un courant électrique $i_N = I/N$,donner l'expression du moment total en O des forces de Laplace, $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{e}_z$ qui s'exerce sur la nappe par rapport à l'axe Oz.

I.D - On branche entre les deux conducteurs circulaires, un générateur de f.e.m. U_0 constante et de résistance interne R, la borne positive étant reliée au conducteur circulaire intérieur.

I.D.1) Donner l'expression du courant total I débité par le générateur et qui traverse le moteur (on néglige l'inductance propre du circuit).

I.D.2) Montrer que le moment Γ peut s'écrire sous la forme suivante $\Gamma = M_1U_0 - M_2\omega$ et exprimer M_1 et M_2 en fonction de B, R, r_1 et r_2.

I.D.3) *Application numérique* :

On donne $U_0 = 45\ \mathrm{V}$, $R = 1,2\Omega$, $B = 1T$, $r_1 = 1\ \mathrm{cm}$, $r_2 = 4\ \mathrm{cm}$, $\omega = 4\pi\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Calculer Γ.

Partie II - Moteur asynchrone à courant alternatif

II.A - On considère le circuit électrique de la figure 2 qui comporte un générateur idéal de tension sinusoïdale $u(t) = U_0\cos(\omega t + \varphi_0)$, ou encore : $u(t) = U_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_0)$ un condensateur de capacité C et deux bobines identiques (b_1) et (b_2), d'inductance propre L et de résistance

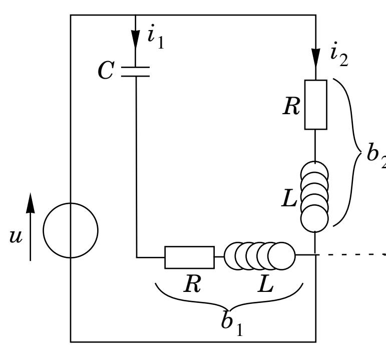


Figure 2

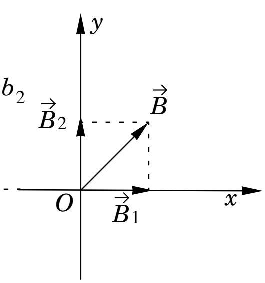


Figure 3

R (on néglige l'inductance mutuelle entre les deux bobines).
Les bobines (b_1) et (b_2) sont disposées de manière à ce que leurs axes soient perpendiculaires en O : (b_1) crée ainsi en O un champ magnétique colinéaire à l'axe Ox, soit $\vec{B_1} = B_1\vec{e_x}$, et (b_2) un champ colinéaire à l'axe Oy, soit $\vec{B_2} = B_2\vec{e_y}$ (figure 3). Les mesures algébriques B_1 et B_2 des champs sont proportionnelles aux intensités qui traversent chaque bobine : $B_1(t) = ki_1(t)$ et $B_2(t) = ki_2(t)$ (k constante positive donnée).

II.A.1) Déterminer les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ et les mettre sous la forme : $i_1(t) = I_{01}\cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_1)$ et $i_2(t) = I_{02}\cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_2)$. Exprimer I_{01}, I_{02}, φ_1 et φ_2 en fonction de R, L, C et ω (on suppose φ_1, $\varphi_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$).

II.A.2) Quelle doit être la relation entre L, C et ω pour que les amplitudes I_{01} et I_{02} des courants soient égales ? Quelle relation lie alors les déphasages φ_1 et φ_2 ? Quel est le signe de φ_1 ? Quel est celui de φ_2 ?

II.A.3) Quelle doit être la relation entre R, L et ω si l'on souhaite en outre que $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$?

II.A.4) Les deux conditions précédentes étant réunies, montrer que par un choix judicieux de φ_0 que l'on précisera, B_1 et B_2 peuvent se mettre sous la forme $B_1 = B_0\cos(\omega t)$ et $B_2 = B_0\sin(\omega t)$. Exprimer B_0 en fonction de k, U_0 et R. Préciser les caractéristiques du champ total $\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$ créé par les deux bobines en O.

II.A.5) *Application numérique* :

On donne $k = 10^{-3}\,\mathrm{T\cdot A^{-1}}$, $L = 100\ \mathrm{mH}$, $\omega = 100\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $U_{eff} = 220\ \mathrm{V}$.

Calculer B_0.

II.B - Le champ magnétique $\vec{B}$ ci-dessus agit sur une petite bobine plate, de n spires de section S, fermée sur elle même, d'inductance propre L_1 et de résistance R_1 (on suppose que le champ $\vec{B}$ est uniforme sur toute la bobine). Le centre de la bobine coïncide avec le point O et la bobine tourne autour de l'axe Oz à la vitesse Ω que l'on suppose constante : le vecteur unitaire $\vec{N}$ normal au plan de la bobine en O reste

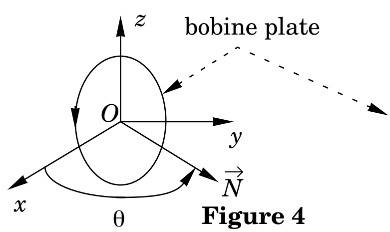


Figure 4

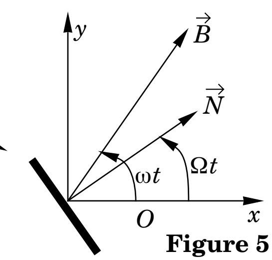


Figure 5

constamment dans le plan Oxy ; l'angle $\theta = (\vec{e_x}, \vec{N})$ s'écrit donc $\theta = \Omega t$ en supposant $\theta = 0$ à l'instant initial (figures 4 et 5).

II.B.1) Déterminer la f.e.m. induite par le champ $\vec{B}$ dans la petite bobine et en déduire que cette bobine est parcourue par un courant i de la forme : $i(t) = I_0 \sin((\omega - \Omega)t - \psi)$. Exprimer I_0 et ψ en fonction de la constante $\Phi_0 = nSB_0$ et de R_1, L_1, ω, Ω.

II.B.2) Exprimer le moment $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e_z}$ du couple électromagnétique subi par la petite bobine en fonction de Φ_0, R_1, L_1, ω, Ω et t.

II.B.3) Calculer la valeur moyenne Γ_m de Γ en fonction de Φ_0, R_1, L_1, ω, Ω ; tracer le graphe de Γ_m en fonction de Ω pour $\Omega \in [0, \omega]$ (on suppose $R_1 < L_1\omega$). Pourquoi restreint-on l'étude à l'intervalle $[0, \omega]$?

II.B.4) *Application numérique* :

On donne $\Phi_0 = 10^{-3}\ \mathrm{T \cdot m^2}$, $L_1 = 100\ \mathrm{mH}$, $R_1 = 1\ \Omega$, $\omega = 100\pi\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.
Calculer la valeur maximale $\Gamma_{m,\,Max}$ de Γ_m et la vitesse angulaire correspondante de la petite bobine.

II.B.5) Pour quelles valeurs de Ω le moteur a-t-il un fonctionnement stable ? Justifiez brièvement votre réponse.

Partie III - Étude dynamique

On considère un moteur à aimant inducteur du type de celui étudié en Partie I ; alimenté par une tension u, il exerce un couple moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e_z}$. L'ensemble des parties mobiles (rotor, arbre, pièces diverses) de ce moteur possède un moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation Oz.

Dans toute cette partie on suppose $\omega > 0$.

III.A - Le moteur tourne à vide à la vitesse ω ; Γ s'écrit $\Gamma = M_1 u - M_2 \omega$ (M_1 et M_2 étant deux constantes positives données).

III.A.1) En supposant que les parties mobiles ne soient soumises qu'au couple moteur, écrire l'équation du mouvement.

III.A.2) Quelle est l'expression de la vitesse ω_0 en régime permanent lorsque $u = U_0 =$ constante ?

III.A.3) On suppose $u = U_0$ et le régime permanent est établi. À un instant que l'on choisit comme instant initial, $t = 0$, la tension u passe de la valeur U_0 à la valeur constante U_1 ($U_1 > U_0$).
Donner, pour $t > 0$, l'expression de la vitesse ω en fonction du temps.

On pourra poser $\tau = J/N$. Quelle est la dimension de la constante τ ? Justifier votre réponse.

III.B - On associe au moteur un dispositif électromécanique qui permet d'avoir $\Gamma = \Gamma_0$ (Γ_0 constante positive) lorsque le moteur est alimenté et $\Gamma = 0$ lorsque le moteur ne l'est pas.

III.B.1) La partie mobile du moteur est soumise, en outre, à l'action d'un couple résistant de moment $\vec{\Gamma}_R = \Gamma_R \vec{e}_z$ tel que $\Gamma_R = -\Gamma_{R0}$ (Γ_{R0} constante positive) lorsque le moteur tourne et $|\Gamma_R| \le \Gamma_{R0}$ lorsque le moteur est immobile. Ce couple résistant ne peut évidement pas entraîner la rotation du moteur et ne peut que ralentir celle-ci lorsque le moteur tourne.

a) Le moteur est à l'arrêt. À l'instant que l'on choisit comme instant initial, $t = 0$, on alimente le moteur. À quelle condition le moteur peut-il démarrer ?

b) La condition précédente étant réalisée, déterminer la vitesse ω du moteur en fonction de Γ_0, Γ_{R0}, J et du temps t.

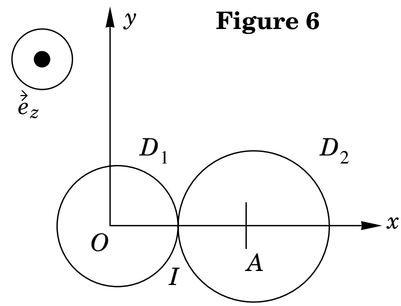
c) On coupe l'alimentation du moteur à l'instant t_0. Soit t_1 l'instant auquel le moteur s'arrête. Exprimer t_1 en fonction de t_0, Γ_0 et Γ_{R0}.

d) *Application numérique* :

On donne $\Gamma_0 = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot m}$, $\Gamma_{R0} = 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot m}$, $t_0 = 1\ \mathrm{s}$. Calculer t_1.

III.B.2) On associe au moteur un ensemble d'engrenages. Sur l'arbre du moteur est fixée une roue dentée D_1 d'axe Oz et de rayon R_1 ; le moment d'inertie de l'ensemble des parties mobiles (rotor, arbre, D_1, pièces diverses) par rapport à l'axe Oz est J_1. La roue dentée D_1 entraîne à son tour, sans glissement, une roue dentée D_2 d'axe Az (colinéaire à Oz), de rayon R_2 et de moment d'inertie J_2 par rapport à Az (figure 6) : le seul mouvement de D_2 est une rotation autour de l'axe Az.

Figure 6



L'ensemble étant immobile, on alimente le moteur à partir d'un instant pris pour instant initial $t = 0$. La partie mobile du moteur et la roue D_1 sont alors soumises au couple moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma_0 \vec{e}_z$ (Γ_0 constante positive) et celui-ci est suffisamment intense pour que le moteur puisse démarrer. Partie mobile du moteur et roue D_1 sont également soumises à l'action de la roue D_2 : celle-ci peut être représentée par une force $\vec{F}_1 = F_N \vec{e}_x - F_T \vec{e}_y$ s'appliquant au point de contact I entre les deux roues ($F_T > 0$). La roue D_2 est soumise à l'action d'un couple résistant de moment $\vec{\Gamma}_R = \Gamma_{R0} \vec{e}_z$ (Γ_{R0} constante positive) et évidemment à la force $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

a) Exprimer la vitesse de rotation ω_2 de la roue D_2 autour de son axe en fonction de celle ω du moteur et des rayons R_1 et R_2. Justifier le signe de Γ_{R0}.

b) Appliquer le théorème du moment cinétique en projection sur les axes de rotation respectifs à l'ensemble (partie mobile du moteur + roue D_1) puis à la roue D_2. On admettra qu'aucune autre action mécanique que celles précisées ci-dessus n'interviennent dans l'application de ce théorème.

c) En déduire les vitesses angulaires ω et ω_2 en fonction de Γ_0, Γ_{R0}, J_1, J_2, R_1, R_2 et du temps t.

d) Exprimer la norme F_T de la composante tangentielle de la force de contact entre les roues D_1 et D_2 en fonction de Γ_0, Γ_{R0}, J_1, J_2, R_1, R_2.

e) *Application numérique.*
On donne :

$$\Gamma_0 = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot m},\ J_1 = 8 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg\,m^2},\ R_1 = 10^{-2}\ \mathrm{m},\ \Gamma_{R0} = 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot m},$$

$$J_2 = 4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg\,m^2},\ R_2 = 2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}.$$

Calculer F_T et les vitesses ω et ω_2 atteintes respectivement par D_1 et D_2 au bout de $t = 1\ \mathrm{s}$.

••• FIN •••
