PHYSIQUE I

La Terre est entourée de zones, appelées « ceintures de Van Allen » , où des particules chargées, de haute énergie, sont piégées par le champ magnétique terrestre. Dans ces zones, les trajectoires des particules s'enroulent autour des lignes de champ terrestre. Au fur et à mesure que les particules se rapprochent des pôles magnétiques de la terre, les trajectoires se resserrent et la composante longitudinale de la vitesse des particules le long des lignes de champ diminue ; elle peut finir même par s'annuler et les particules correspondantes repartent alors en sens inverse vers l'autre pôle où le même rebroussement se produit. Ces particules chargées oscillent ainsi entre deux points M_0 et M'_0 appelés points miroirs (figure 1).

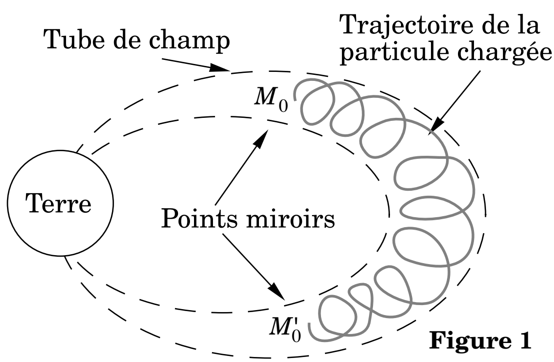


Figure 1

Le problème qui suit se propose d'expliquer la présence des ceintures de Van Allen autour de la terre. On se place dans le cadre de la mécanique newtonienne et on néglige toutes les forces autres que la force magnétique.

Données numériques :

Charge de l'électron (module) :	$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C
Masse d'un proton :	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg
Masse d'un électron :	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg
Rayon terrestre :	$R_T = 6400$ km

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$

$1eV = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J

$$\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

Filière TSI

Partie I - Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Une particule, de masse m et de charge q, est soumise à l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent (indépendant du temps), dans le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ supposé galiléen. On appelle respectivement $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$ les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz.

Le champ magnétique $\vec{B}$ est colinéaire à Oz : $\vec{B} = B\vec{e_z}(B > 0)$. On pose $\omega = \dfrac{qB}{m}$.

La vitesse $\vec{v}$ de la particule a pour composantes v_x, v_y et v_L : $\vec{v} = v_x\vec{e_x} + v_y\vec{e_y} + v_L\vec{e_z}$; on pose $\vec{v_\perp} = v_x\vec{e_x} + v_y\vec{e_y}$ et $\vec{v_L} = v_L\vec{e_z}$; $\vec{v_\perp}$ et $\vec{v_L}$ désignent ainsi les composantes de la vitesse $\vec{v}$ respectivement perpendiculaire et parallèle au champ $\vec{B}$. La norme du vecteur $\vec{v_\perp}$ est notée $v_\perp$: $v_\perp = \left\|\vec{v_\perp}\right\|$. À l'instant initial, la particule se trouve en O avec la vitesse $\vec{v_0} = v_{\perp 0}\vec{e_x} + v_{L_0}\vec{e_z}$ $(v_{\perp 0} > 0, v_{L_0} > 0)$.

I.A - Montrer que l'énergie cinétique E_c de la particule est une constante du mouvement.

I.B - Montrer que $\vec{v_L}$ est une constante du mouvement. En déduire que $v_\perp$ est également constant au cours du mouvement. On pose $E_{c\perp} = \frac{1}{2}mv_\perp^2$.

I.C - On étudie la projection du mouvement de la particule dans le plan $P_\perp$ perpendiculaire à $\vec{B}$.

I.C.1) Déterminer les composantes v_x et v_y de la vitesse de la particule en fonction de $v_{\perp 0}$, ω et du temps t.

I.C.2) En déduire les coordonnées x et y de la particule à l'instant t.

I.C.3) Montrer que la projection de la trajectoire de la particule dans le plan $P_\perp$ est un cercle Γ de centre C (centre guide) et de rayon a (rayon de giration). Déterminer les coordonnées x_c et y_c de C, le rayon a et la période de révolution T_1 de la particule sur ce cercle en fonction de $v_{\perp 0}$ et ω.

I.C.4) Tracer, avec soin, le cercle Γ dans le plan $P_\perp$, dans le cas d'un proton, puis dans le cas d'un électron. Préciser en particulier les sens de parcours de chaque particule sur Γ.

I.C.5) Application numérique : $B = 0,5\ \mu T$. On suppose $v_{L_0}^2 = \dfrac{v_{\perp 0}^2}{10}$.
Calculer, pour un électron d'énergie cinétique $E_c = 55\ \mathrm{keV}$, le module v de sa vitesse, le rayon a et la période T_1 ; que pensez-vous de la valeur de v ? Mêmes questions pour un proton d'énergie cinétique $E_c = 0,55\ \mathrm{MeV}$.

I.C.6) L'orbite circulaire Γ peut être assimilée à une petite spire de courant ; déterminer l'intensité i de ce courant associé au mouvement de la particule sur Γ et en déduire le moment dipolaire magnétique

$$\vec{\mu} = -\mu\,\vec{e_z}$$

correspondant. Exprimer $\mu(\mu > 0)$ en fonction de $E_{c\perp}$ et B puis en fonction de q, m et du flux Φ du champ $\vec{B}$ à travers l'orbite circulaire Γ.

I.D -

I.D.1) Quelle est la trajectoire de la particule chargée ? Expliquer pourquoi elle s'enroule sur un tube de champ du champ $\vec{B}$.

I.D.2) On peut décomposer le mouvement de la particule en un mouvement sur un cercle dont le centre C se déplace à la vitesse $\vec{v_L}$ le long de Oz. Quelle distance b parcourt le centre C sur Oz durant la période T_1 ? Exprimer b en fonction de v_L et ω. Comparer b et a dans le cas où

$$v_{L_0}^2 = \frac{v_{\perp 0}^2}{10}.$$

Partie II - Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique non uniforme

On suppose que le champ $\vec{B}$ n'est plus tout à fait uniforme, ses variations restant très faibles sur une distance de l'ordre du rayon de giration a ou de la distance b. Le champ $\vec{B}$ présente la symétrie de révolution autour de l'axe Oz ; en outre, on admet que la composante B_z du champ $\vec{B}$ ne dépend que de z dans la zone située au voisinage de l'axe Oz où se déplace la particule chargée et dans laquelle il n'y a aucun courant. On suppose en outre B_z positive. Un point M de cette zone est repéré par ses coordonnées cylindriques (ρ, θ, z).

II.A -

II.A.1) Montrer que la composante orthoradiale B_θ du champ $\vec{B}$ est nulle.

II.A.2) En exprimant le flux du champ $\vec{B}$ à travers un petit cylindre judicieusement choisi, déterminer la composante radiale B_ρ du champ $\vec{B}$ au point M en fonction de ρ et de la dérivée

$$\frac{dB_z}{dz}.$$

II.B - En considérant le champ $\vec{B}$ « localement » uniforme, on peut utiliser certains résultats de la partie I : dans ce champ, une particule chargée décrit un mouvement circulaire dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$, autour d'un centre guide C se déplaçant le long de Oz ; mais, puisque $\vec{B}$ varie d'un point à un autre, le rayon a du cercle, la période T_1 de révolution (dont les expressions trouvées à la partie I restent valables en remplaçant B par B_z) varient également au cours du mouvement et le déplacement de C sur Oz n'est plus uniforme (les vitesses v_L et $v_\perp$ ne sont plus constantes).

II.B.1) Montrer que la composante F_z sur l'axe Oz de la force qui agit sur la particule chargée a pour expression :

$$F_z = -\frac{mv_\perp^2}{2B_z}\frac{dB_z}{dz} \qquad (v_\perp \text{ est défini à la partie I})$$

II.B.2) En utilisant l'expression de μ obtenue à la question I.C.6 dans laquelle B est remplacé par B_z, calculer

$$\frac{d\mu}{dt}\ ;$$

en déduire que μ est une constante du mouvement. Peut-on encore dire que la particule s'enroule sur un tube de champ du champ $\vec{B}$ au cours de son mouvement ?

II.B.3) Exprimer l'énergie cinétique E_c de la particule en fonction de m, v_L, μ et B_z.

II.B.4) En déduire que la particule chargée ne peut entrer dans une zone où la composante B_z du champ dépasse une valeur maximale B_{max} que l'on exprimera en fonction de E_c et μ.

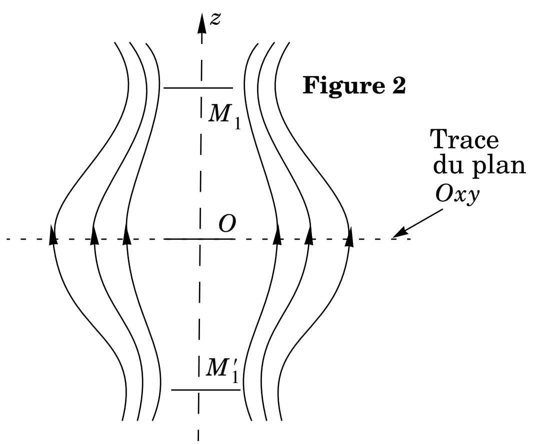


Figure 2

II.C -

II.C.1) Sur la figure 2, ont été représentées plusieurs lignes de champ dans le plan méridien passant par Oz. On constate que le plan Oxy est un plan de symétrie pour la distribution de courants créant le champ $\vec{B}$. Comment varie l'intensité du champ $\vec{B}$ du point O au point M_1 ? Justifier brièvement la réponse. Même question du point O au point M'_1. Que peut-on dire de l'intensité

B_0 du champ en O ? Les points M_1 et M'_1 étant symétriques par rapport à O sur l'axe Oz le champ y a même intensité B_1.

II.C.2) On suppose B_{max} compris entre B_0 et B_1. Montrer que, dans ces conditions, le centre guide C oscille périodiquement entre deux points M_0 et M'_0 symétriques par rapport au point O, d'abscisses respectives $z_0 > 0$ et $-z_0$ (M_0 est situé entre O et M_1, M'_0 est situé entre O et M'_1) et que la période T_2 de ce mouvement est donnée par :

$$T_2 = 4\sqrt{\frac{m}{2\mu}} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{B_{max} - B(z)}}$$

où $B(z)$ représente l'intensité du champ magnétique en un point M variable de l'axe Oz situé entre O et M_0.

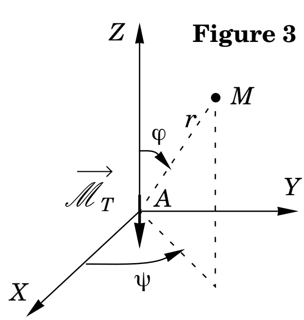
Partie III - Étude du champ magnétique terrestre

On admet que le champ magnétique terrestre $\vec{B}$ est assimilable au champ magnétique d'un dipôle magnétique situé au centre A de la terre, de moment

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_T} = -\mathscr{M}_T \overrightarrow{E_Z}$$

($\mathscr{M}_T$ est positif et $\overrightarrow{E_Z}$ désigne le vecteur unitaire de l'axe géomagnétique de la terre qui est légèrement incliné par rapport à l'axe de rotation terrestre : le signe moins tient compte du fait que sud et nord magnétiques sont inversés par rapport au sud et nord géographiques). Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques (r, φ, ψ) par rapport à l'axe géomagnétique AZ (figure 3).

Figure 3



En un point M suffisamment éloigné de A, les composantes de $\vec{B}$ s'écrivent :

$$\vec{B} = B_r\vec{e_r} + B_\varphi\vec{e_\varphi} + B_\psi\vec{e_\psi} \text{ avec } \begin{cases} B_r = -\dfrac{\mu_0\mathscr{M}_T}{4\pi}\dfrac{2\cos\varphi}{r^3} \\ B_\varphi = -\dfrac{\mu_0\mathscr{M}_T}{4\pi}\dfrac{\sin\varphi}{r^3} \\ B_\psi = 0 \end{cases} ;$$

$\vec{e_r}$, $\vec{e_\varphi}$, $\vec{e_\psi}$ sont les vecteurs unitaires sphériques.

III.A - Établir l'équation différentielle d'une ligne de champ. En intégrant cette équation, montrer que l'équation d'une ligne de champ est donnée par l'expression $r = r_0 \sin^2_\varphi$ où r_0 désigne une constante.

III.B - Tracer l'allure de quelques lignes de champ dans un plan méridien (plan défini par $\psi = \text{constante}$) sans oublier d'y indiquer le sens du champ.

Que représente la distance r_0 pour une ligne de champ ?

III.C - Calculer l'intensité $B = B(\varphi)$ du champ magnétique sur une ligne de champ ; en désignant par B_0 l'intensité correspondante dans le plan équatorial magnétique (plan défini par $\varphi = \pi/2$), écrire B sous la forme $B = B_0 f(\varphi)$.

Exprimer B_0 en fonction de $\mathscr{M}_T$, r_0 et μ_0 et expliciter la fonction $f(\varphi)$.

III.D - Pour quelle valeur φ, l'intensité $B(\varphi)$ du champ est-elle minimale ? Exprimer la valeur B_{min} correspondante en fonction de B_0.

III.E - Vérifier que $f(\pi - \varphi) = f(\varphi)$.

III.F - Représenter le graphe de la fonction $f(\varphi)$ en précisant le domaine de variation de l'angle φ.

III.G - On se propose de déterminer, en un point P (défini par l'angle $\varphi = \varphi_P$) situé à la surface de la terre, l'intensité de la composante horizontale $B_h = |B_\varphi|$ du champ magnétique terrestre en mesurant les petites oscillations dans un plan horizontal d'une aiguille aimantée.

L'aiguille aimantée est un petit solide qui peut tourner sans frottement autour de son axe vertical. Elle est assimilable à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mathscr{M}}$ horizontal et de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation. On pose

$$\alpha = \left(\vec{e}_\varphi, \vec{\mathscr{M}}\right).$$

III.G.1) Quelle est la position d'équilibre stable de l'aiguille aimantée dans le champ magnétique terrestre ? Justifier brièvement la réponse.

III.G.2) Établir l'équation différentielle du mouvement de l'aiguille soumise au champ magnétique terrestre.

III.G.3) En déduire la période τ_0 des petites oscillations de cette aiguille en fonction de B_h, J et la norme $\mathscr{M}$ du moment $\vec{\mathscr{M}}$.

III.G.4) Les valeurs de $\mathscr{M}$ et J n'étant pas connues, on utilise le champ magnétique $\vec{B}_e$ créé par une bobine parcourue par un courant électrique pour s'en affranchir. On place d'abord la bobine telle que $\vec{B}_e$ et la composante horizontale du champ terrestre soient parallèles et de même sens et on mesure la période τ_1 des petites oscillations de l'aiguille aimantée. On change ensuite le sens du courant dans la bobine et on mesure la nouvelle valeur τ_2 de la période des petites oscillations. En déduire B_h en fonction de l'intensité B_e du champ $\overrightarrow{B_e}$ créé par la bobine et du rapport τ_1/τ_2 (on supposera $B_h < B_e$).

III.G.5) *Application numérique :* en un point P défini par $\varphi_P = 50°$, on a mesuré $B_e = 100\ \mu T$ et $\tau_1/\tau_2 = 0,78$. Calculer B_h.

En déduire le moment magnétique terrestre $\mathscr{M}_T$. Dans quel intervalle l'intensité du champ magnétique terrestre sur la surface de la terre varie-t-elle ?

Partie IV - Piégeage des particules chargées par le champ magnétique terrestre

Dans cette partie, on utilise les notations des parties précédentes. En négligeant l'influence de la courbure des lignes de champ terrestre, on peut utiliser tous les résultats de la partie II : une particule chargée dans l'espace, soumise à l'action du champ terrestre, s'enroule sur un tube de champ défini par le paramètre r_0 et on suppose qu'elle est piégée entre les points miroirs M_0 et M'_0 définis respectivement par les angles φ_0 et $(\pi - \varphi_0)$ (figures 1 et 3).

IV.A - Expliquer brièvement que l'expression de la période T_2 d'oscillations entre M_0 et M'_0, obtenue à la question II.C.2 peut s'écrire maintenant :

$$T_2 = 4\sqrt{\frac{m}{2\mu}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} \frac{ds}{\sqrt{B_{max} - B(\varphi)}}$$

Exprimer le module ds de l'élément d'abscisse curviligne de la ligne de champ considérée en fonction de r_0 et φ.

IV.B - Montrer que, si φ_0 reste voisin de $\pi/2$, l'expression ci-dessus devient

$$T_2 \approx \gamma r_0 \sqrt{\frac{m}{\mu B_0}}.$$

Quelle est l'unité du coefficient γ ? Justifier la réponse. Quelle est sa valeur numérique ?

IV.C - *Application numérique :* on reprend les valeurs numériques des questions précédentes. La particule chargée, d'énergie cinétique E_c, s'enroule autour d'une ligne de champ définie par le paramètre $r_0 = 4R_T$. On suppose qu'à un instant pris comme instant initial, cette particule se trouve dans le plan équatorial magnétique $(\varphi = \pi/2)$, avec une vitesse dont les composantes $\overrightarrow{v_\perp}$ et $\overrightarrow{v_L}$ vérifient

$$\frac{\left\|\overrightarrow{v_L}\right\|^2}{\left\|\overrightarrow{v_\perp}\right\|^2} = \frac{1}{10}.$$

IV.C.1) Calculer B_{min} sur la ligne de champ.

IV.C.2) Calculer la valeur de B_{max} pour cette particule. Vérifier que les conditions de piégeage sont effectivement satisfaites et que φ_0 reste voisin de $\pi/2$. Moyennant cette dernière remarque, déterminer la valeur de φ_0.

IV.C.3) En déduire les valeurs de T_2 pour un électron d'énergie $E_c = 55\ \mathrm{keV}$ et un proton d'énergie $E_c = 0,55\ \mathrm{MeV}$. Que pensez-vous des valeurs trouvées sachant que des mesures donnent des valeurs de T_2 de l'ordre de $100\ \mathrm{ms}$ pour l'électron et de l'ordre de $10\ \mathrm{s}$ pour le proton ?

IV.D - Quels sont les effets des particules chargées sur un vaisseau spatial qui traverserait les ceintures de Van Allen ?

••• FIN •••