

# PHYSIQUE I

## *De l'oscillateur harmonique*

Le problème analyse une expérience classique de travaux pratiques destinée à mettre en évidence un phénomène de résonance en mécanique. On considère un ressort vertical à spires non jointives dans son domaine de linéarité. Il est caractérisé par une masse linéique  $\mu$ , une constante de raideur  $k$ , et un corps  $M$ , de masse  $m$ , est accroché à son extrémité inférieure. L'étude mécanique est faite dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ) du laboratoire supposé galiléen et les déplacements envisagés sont verticaux. On utilise les notations suivantes :

- $\vec{e}_x$ , vecteur unitaire définissant la direction de l'axe  $x'x$  et le sens de la verticale descendante,
- $\vec{g} = g\vec{e}_x$ , champ de pesanteur uniforme,
- $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

### *Partie I - Oscillations sans frottement*

**I.A - Oscillations libres** (on prend  $\mu = 0$ ). L'extrémité supérieure du ressort est fixe.

I.A.1) Faire un bilan des forces appliquées à  $M$ .

I.A.2) Déterminer l'équation différentielle ( $E_1$ ) vérifiée par  $x$ , déplacement de  $M$  par rapport à la position d'équilibre, et sa solution pour les conditions initiales suivantes :  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

I.A.3) Proposer deux méthodes indépendantes permettant d'accéder à la valeur de  $k$ .

I.A.4) Définir les deux énergies potentielles à considérer, en fonction de  $k$ ,  $m$ ,  $g$  et  $x$  en prenant comme référence la position d'équilibre  $x = 0$ .

I.A.5) En déduire l'énergie potentielle totale  $E_p$ , en fonction de  $k$  et de  $x$ , et l'énergie mécanique  $E$  en prenant les conditions initiales du I.A.2.

I.A.6) Tracer sur un même diagramme les courbes représentant les variations de  $E_p$  et de  $E$  en fonction de  $x$  et montrer comment on peut y lire la valeur de l'énergie cinétique  $E_c$ .

# Filière TSI

I.A.7) Montrer qu'en valeur moyenne il y a équipartition de l'énergie entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

**I.B - Oscillations forcées** (on prend  $\mu = 0$ )

Grâce à un système bielle-manivelle on impose à l'extrémité supérieure du ressort le déplacement  $X(t)\hat{e}_x = a\cos\omega t\hat{e}_x$ ,  $a$  et  $\omega$  étant des constantes.

I.B.1) Déterminer l'équation différentielle ( $E_2$ ) du mouvement de  $M$  et montrer que l'existence de la sollicitation extérieure revient à introduire dans le bilan établi au I.A.2 un terme supplémentaire  $F_{sup}$  que l'on exprimera en fonction de  $k$  et de  $X$ .

I.B.2) On s'intéresse au cas  $\omega \neq \omega_0$ .

a) Donner la solution de ( $E_2$ ) avec les conditions initiales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Mettre le résultat sous la forme du produit de deux fonctions trigonométriques dont on exprimera les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , ( $\omega_1 > \omega_2$ ) en fonction de  $\omega$  et de  $\omega_0$ .

b) Tracer l'allure de la courbe représentant les variations de  $x$  en fonction du temps  $t$  pour  $\omega = 1,2 \cdot \omega_0$ , définir et déterminer la période des battements en fonction de  $\omega_2$ .

c) Proposer une expérience de battements en optique (8 lignes maximum) en précisant son intérêt pratique.

d) Exprimer la variation d'énergie mécanique par unité de temps  $\frac{dE}{dt}$ . L'énergie se conserve-t-elle ? Augmente-t-elle ? Diminue-t-elle ? Varie-t-elle en moyenne ?

I.B.3) On s'intéresse au cas  $\omega = \omega_0$ .

a) Déterminer la solution de ( $E_2$ ) avec les conditions initiales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  par passage à la limite  $\omega \rightarrow \omega_0$  de la solution obtenue au I.B.2-a).

b) Tracer la courbe représentant les variations de  $x$  en fonction du temps  $t$ . Donner l'équation des deux demi-droites enveloppes de la courbe.

c) Quel est le phénomène mis ainsi en évidence ? Qu'est-ce qui en limite l'acuité dans la réalité ? Donner un exemple d'un tel phénomène dans les domaines de l'acoustique, de l'électrocinétique, de l'optique.

d) Déterminer  $E(t)$  et sa variation par unité de temps sur l'intervalle  $[t, t + T_0]$  tel que  $\sin\omega_0 t = 1$  et  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Conclure quant à la signification énergétique du phénomène.

## Partie II - Oscillations forcées avec amortissement fluide

Grâce à un dispositif approprié (partie IV) on soumet  $M$  à une force de frottement fluide  $\vec{F}_f$  de la forme  $\vec{F}_f = -h\vec{v}$ ,  $h$  étant une constante positive et  $\vec{v}$  représentant la vitesse de  $M$ . On impose toujours le déplacement  $X(t) = a\cos\omega t$  à l'extrémité supérieure du ressort. On note

$$Q = \frac{m\omega_0}{h}$$

le facteur de qualité et on prend toujours  $\mu = 0$ .

**II.A** - Déterminer l'équation différentielle ( $E_3$ ) du mouvement de  $M$ .

**II.B** - On s'intéresse à la solution en régime forcé. Quel est, en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ , l'ordre de grandeur du temps  $\tau$  nécessaire pour considérer seulement cette solution ?

**II.C** - Montrer que l'amplitude  $A$  du déplacement de  $M$  s'exprime sous la forme :

$$A = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}.$$

**II.D** - Donner une interprétation physique du mouvement de  $M$  aux hautes et basses fréquences.

**II.E** - Montrer que, si  $Q$  est supérieur à une valeur minimale  $Q_{min}$  à déterminer,  $A$  prend une valeur maximale pour une pulsation  $\omega_r$  à exprimer en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

**II.F** - Déterminer l'expression  $V$  de l'amplitude de la vitesse de  $M$  en fonction de  $a$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .

**II.G** - Donner une interprétation physique de la variation de  $V$  aux hautes et basses fréquences.

**II.H** - Montrer que  $V$  prend une valeur maximale pour une pulsation indépendante de  $Q$ .

**II.I** - Grâce à un capteur de position de  $M$ , on mesure une tension  $V_{pp}$  proportionnelle à l'amplitude  $A$ . À partir des valeurs expérimentales suivantes tracer les courbes représentant les variations de  $V_{pp}(mV)$  et de  $f \cdot V_{pp}(V \cdot Hz)$  en fonction de la fréquence  $f(mHz)$ .

Échelles :  $1V \leftrightarrow 2\text{ cm}$ ,  $1V \cdot s^{-1} \leftrightarrow 1\text{ cm}$ ,  $1Hz \leftrightarrow 4\text{ cm}$ .

$V_{pp}$	1844	1844	1844	1844	1906	2063	2281	2500	2906
$f$	156,3	213,9	287,8	412,4	615,4	869,6	1026	1250	1429
$f \cdot V_{pp}$	0,228	0,394	0,531	0,760	1,173	1,794	2,340	3,125	4,153
$V_{pp}$	3438	4094	4531	4938	5750	5906	5531	4188	3281
$f$	1613	1786	1887	1923	2128	2198	2299	2500	2597
$f \cdot V_{pp}$	5,545	7,312	8,550	9,496	12,24	12,98	12,71	10,47	8,521
$V_{pp}$	3250	2813	2344	1812	1469	1094	1062		
$f$	2632	2778	2857	3077	3361	3636	3704		
$f \cdot V_{pp}$	8,554	7,814	6,697	5,575	4,937	3,978	3,934		

**II.J** - À l'évolution de quelle grandeur physique accède-t-on en traçant la courbe représentant les variations de  $f \cdot V_{pp}$  en fonction de  $f$  ?

**II.K** - Définir la bande passante  $\Delta f$ . Déterminer graphiquement  $\Delta f$  et la fréquence propre  $f_0$  associées à la fonction de transfert  $H_v: f \rightarrow f \cdot V_{pp}$ . En déduire le facteur de qualité  $Q$ . Comparer ces valeurs aux résultats donnés par un logiciel de modélisation :  $V_{pp}(0) = 1811 \pm 59$  mV,  $f_0 = 2228 \pm 12$  mHz,  $Q = 3, 183 \pm 0, 140$ . Que penser du modèle proposé pour interpréter l'expérience ? Sachant que  $m = 0,275$  kg, calculer  $h$ .

**II.L** - Déterminer le schéma électrique équivalent, c'est-à-dire décrit par une équation différentielle du même type que  $(E_3)$ , association d'une résistance  $R$ , d'une inductance  $L$ , d'une capacité  $C$ , alimentée par une source de courant idéale  $I \cos \omega t$ . Dresser un tableau d'analogies électromécaniques.

### **Partie III - Phénomènes de propagation**

En augmentant la fréquence du système exciteur on observe que des spires paraissent nettes et d'autres paraissent floues. Pour interpréter ces observations on améliore la modélisation précédente en prenant en compte la masse du ressort, mais on néglige son poids devant toutes les autres forces.

**III.A** - Montrer que l'association de deux ressorts, de constantes de raideur  $k_1$  et  $k_2$ , mis bout à bout, est équivalente à un ressort de raideur  $k_{eq}$  donnée par la relation

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

En déduire la constante de raideur  $K$  d'une tranche, comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + \Delta x$ , d'un ressort de longueur à vide  $L (0 \leq x \leq L)$  et de constante de raideur  $k$  en fonction de  $k$ ,  $L$  et  $\Delta x$ .

**III.B** - On note  $\xi(x, t)$  le déplacement du point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  par rapport à sa position d'équilibre. Montrer que la force  $F$  exercée par le tronçon  $[x, L]$  sur le tronçon  $[0, x]$  vaut

$$F = kL \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

**III.C** - En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la tranche  $[x, x + \Delta x]$  et en négligeant son poids devant  $F$ , montrer que  $\xi(x, t)$  vérifie l'équation ( $E_4$ ) :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

et exprimer  $c$  en fonction de  $k$ ,  $L$  et  $\mu$ . Quelle est la dimension de  $c$  ?

**III.D** - Soit  $\varepsilon(x, t) = \xi(x, t) - \xi_{eq}(x)$  où  $\xi_{eq}(x)$  représente le déplacement du point d'abscisse  $x$  à l'équilibre lorsque  $M$  est accroché. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la masse  $m$ , déterminer la relation liant les dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \text{ en } x = L.$$

**III.E** - On recherche des solutions de ( $E_4$ ) de la forme  $\varepsilon(x, t) = f(x) \cos \omega t$ . Quelle est la nature de ces solutions ? Quels arguments suggèrent de s'orienter vers de telles solutions ?

**III.F** - En utilisant la notation complexe  $\varepsilon(x, t) = \underline{A}(x) e^{j\omega t}$ , montrer en utilisant ( $E_4$ ) que  $\underline{A}(x)$  peut se mettre sous la forme

$$\alpha \cos \frac{\omega x}{c} + \beta \sin \frac{\omega x}{c} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux constantes complexes.}$$

En utilisant les conditions aux limites déterminer  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\beta}$ .

**III.G - Montrer que**

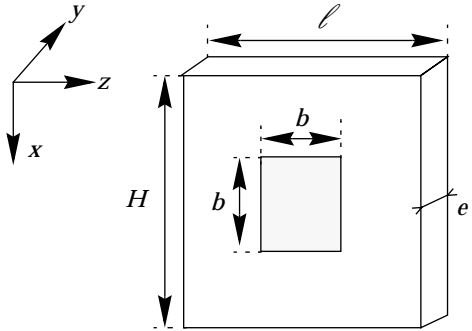
$$A(L) = \frac{a}{\cos\Phi - \frac{\omega^2 \sin\Phi}{\omega_0^2} + j \frac{\omega \sin\Phi}{\omega_0 Q\Phi}} \quad \text{où } \Phi = \frac{\omega L}{c}.$$

Montrer qu'on peut retrouver le résultat du II.C.

Pour  $Q \gg 1$  déterminer l'équation donnant les fréquences de résonance.

**Partie IV - Système de freinage électromagnétique**

Le dispositif de freinage est constitué d'une plaque d'aluminium, partie intégrante de  $M$ , se déplaçant dans le champ magnétique créé par un électroaimant. La plaque de hauteur  $H$  selon  $x'x$ , d'épaisseur  $e$  selon  $y'y$ , de largeur  $l$  selon  $zz$  de conductivité  $\gamma$ , a un mouvement de translation rectiligne verticale de vitesse  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  et est soumise à l'action du champ magnétique constant :



$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$$

dans un volume fixe dans  $(R)$  (en grisé sur la figure), de hauteur  $b(b < H)$ , de largeur  $b(b < l)$  et d'épaisseur  $e$ .  $\vec{B} = \vec{0}$  partout ailleurs dans la plaque.

On note  $[\vec{E}, \vec{B}]$  le champ électromagnétique,  $\vec{j}$  la densité de courant, dans le référentiel galiléen  $(R)$  du laboratoire et respectivement  $[\vec{E}, \vec{B}]$ ,  $\vec{j}$  leurs expressions dans le référentiel  $(R')$  du conducteur.

**IV.A - Rappeler la loi d'Ohm locale dans  $(R')$ .**

**IV.B -** On se place dans le cadre de la relativité galiléenne. Exprimer la force de Lorentz s'exerçant sur une charge ponctuelle dans chacun des référentiels précédents. Par application du théorème de composition des vitesses et en admettant l'invariance de la force et de la charge, exprimer  $[\vec{E}, \vec{B}]$  en fonction de  $[\vec{E}, \vec{B}]$  et de la vitesse  $\vec{v}$  de la plaque.

**IV.C -** Montrer en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss et l'équation locale de conservation de la charge que la densité volumique de charge est nulle dans le conducteur. On introduira un temps de relaxation fonction de  $\gamma$  et  $\epsilon_0$  dont on

montrera en utilisant des valeurs numériques raisonnables qu'il est négligeable devant les temps caractéristiques à considérer dans l'expérience.

**IV.D** - En revenant aux définitions de  $\vec{j}$  et  $\vec{j}'$  en fonction des densités volumiques et des vitesses des charges fixes et mobiles dans  $(R)$  démontrer que  $\vec{j} = \vec{j}'$ .

**IV.E** - Quel nom de physicien reste attaché à ces courants ? Situer ce physicien dans son siècle. Quelle expérience l'a rendu célèbre ? Que voulait-il montrer ? Donner une autre application pratique courante et intéressante de ces courants.

**IV.F** - Montrer que  $\vec{E}$  est un champ de gradient et définir le champ électromoteur  $\vec{E}_m$ , terme non conservatif dans l'expression de  $\vec{E}$ ,

$$\text{en fonction de } \vec{v} = v\vec{e}_x \text{ et } \vec{B} = B_0\vec{e}_y .$$

**IV.G** - On assimile la plaque à un ensemble de tiges conductrices horizontales se déplaçant dans un plan vertical. Ces tiges de longueur  $l > b$  selon  $z/z$ , d'épaisseur  $e$  selon  $y/y$  sont recouvertes sur leur surface latérale d'un vernis isolant dont on néglige l'épaisseur. Leur nombre par unité de longueur selon  $x/x$  est noté  $n$  et leur résistance électrique  $r$ . Leurs extrémités en  $z = -l/2$  sont reliées par un fil conducteur dont on néglige la résistance ; il en est de même pour les extrémités en  $z = +l/2$ . Exprimer la forme intégrale de la loi d'Ohm donnant la tension aux bornes d'une tige, parcourue par un courant d'intensité  $i$  et soumise à l'action de  $\vec{B}$ , en fonction de  $v$ ,  $b$ ,  $B_0$ ,  $r$  et  $i$ . On représentera le schéma électrique équivalent en précisant le sens du courant et de la tension.

**IV.H** - Que devient son expression pour une tige parcourue par un courant d'intensité  $i'$  et non soumise à l'action de  $\vec{B}$  ?

**IV.I** - Exprimer  $i'$ , en fonction de  $i$ ,  $b$  et  $H$  puis  $i$  en fonction de  $v$ ,  $b$ ,  $B_0$ ,  $r$  et  $H$ , enfin  $r$  en fonction de  $\gamma$ ,  $l$ ,  $e$  et  $n$ . Montrer que la puissance totale  $P_J$  dissipée par effet Joule dans la plaque est donnée par

$$P_J = \frac{\gamma b^3 (H-b) e v^2 B_0^2}{lH} .$$

**IV.J** - Déterminer la force de Laplace exercée sur la plaque ainsi que sa puissance  $P_L$ . Comparer  $P_J$  et  $P_L$ . En déduire l'expression du coefficient de frottement  $h$  en fonction de  $\gamma$ ,  $e$ ,  $b$ ,  $B_0$ ,  $l$  et  $H$ .

Avec  $\gamma = 3,65 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ ,  $e = 2 \text{ mm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $(B_0 = 0,15 \text{ T})$ ,  $l = 6 \text{ cm}$  et  $H = 16 \text{ cm}$ , calculer la valeur numérique de  $h$  et la comparer à celle obtenue à la question II.K.

---

••• FIN •••

---