

Le problème s'intéresse à divers aspects de l'écoulement et de l'étalement de liquides visqueux sous forme de films minces. Il comporte des questions non calculatoires, pour lesquelles le candidat s'efforcera de répondre avec concision : quelques mots suffisent en général. Les parties I, II, III sont indépendantes.

**Hypothèses** : L'écoulement est supposé incompressible. Le liquide est décrit par sa masse volumique  $\rho$ , sa viscosité  $\eta$  et sa viscosité cinématique  $\nu = \eta/\rho$  supposées constantes. Le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}$  est supposé uniforme avec  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . On note  $\vec{u}$  le champ des vitesses et  $\vec{a}$  le champ des accélérations. L'équation du mouvement d'une particule de fluide s'écrit alors :

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{u} \tag{1}$$

*Partie I - Écoulement d'un film mince sur un plan incliné*

Une goutte de fluide visqueux s'écoule sur un plan incliné d'angle  $\alpha$  (cf. figure 1 où sont définies les directions unitaires  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ ) en formant un film d'épaisseur  $h(x, t)$  localisé entre  $x = 0$  et  $x = x_{av}(t)$ . Le problème est invariant par translation selon  $\vec{e}_y$  et on a  $u_y = 0$ .

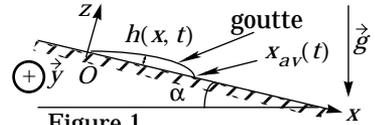


Figure 1

**I.A** - On note  $U^*$  une vitesse caractéristique selon  $\vec{e}_x$ ,  $h^*$  une épaisseur caractéristique du film, et  $L^*$  une longueur caractéristique du film selon  $\vec{e}_x$ . L'hypothèse "film mince" se traduit a priori par la condition  $h^* \ll L^*$ , qu'on suppose vérifiée dans la suite.

I.A.1) Exprimer l'ordre de grandeur de  $u_z/u_x$  en fonction de  $L^*$  et  $h^*$ . Dans la suite, on supposera que  $u_z \approx 0$  dans l'équation (1).

I.A.2) Exprimer l'ordre de grandeur de  $\partial^2 u_x / \partial z^2$ ,  $\partial^2 u_x / \partial x^2$  et des composantes selon  $\vec{e}_x$  de  $\nu \Delta \vec{u}$  et  $(\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u}$  en fonction de  $\nu$ ,  $U^*$ ,  $L^*$  et  $h^*$ .

I.A.3) À quelle condition sur  $h^*$ ,  $L^*$ ,  $U^*$ , et  $\nu$  le terme d'accélération convective est-il négligeable devant le terme de viscosité dans l'équation (1) ? Cette condition est supposée vérifiée dans la suite.

**I.B** -

I.B.1) On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires, ce qui revient à négliger  $\partial \vec{u} / \partial t$  dans l'équation (1). Cette approximation sera justifiée a posteriori en I.C.2. Projeter l'équation (1) sur  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$ .

I.B.2) En déduire l'expression de la pression  $p$  en fonction de  $h(x, t)$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $\alpha$  et de la pression  $p_0$  imposée par l'atmosphère à l'interface liquide-air.

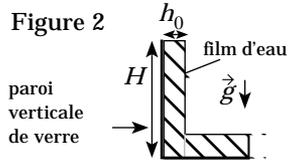
I.B.3) La condition aux limites imposées par l'interface liquide-air s'écrit  $\partial u_x / \partial z = 0$ . Montrer que dans le cas où  $\alpha$  n'est pas trop petit, ce que l'on suppose dans la suite, on a :

$$u_x = \left( \frac{g \sin \alpha}{\nu} \right) \left( hz - \frac{z^2}{2} \right) \quad (2)$$

Préciser l'inégalité entre  $\tan \alpha$ ,  $L^*$  et  $h^*$  traduisant l'hypothèse " $\alpha$  pas trop petit".

I.B.4) Exprimer le débit volumique à travers la section d'épaisseur  $h(x, t)$  et de largeur  $L$  selon  $\vec{e}_y$  en fonction de  $L$ ,  $h(x, t)$ ,  $g$ ,  $\alpha$  et  $\nu$ .

I.B.5) Une expérience de la vie quotidienne : lorsqu'on incline rapidement un verre d'eau puis qu'on le repose en position verticale, un film d'eau apparaît, puis disparaît progressivement en s'écoulant vers le fond (figure 2). En admettant que le film initial a une épaisseur uniforme  $h_0$  et une hauteur  $H = 10$  cm et qu'à la base du film, son épaisseur reste constamment égale à  $h_0$ , déterminer la durée de vie  $T$  du film en fonction de  $\nu$ ,  $g$ ,  $h_0$  et calculer  $T$  pour  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $h_0 = 0,5$  mm.



**I.C - On revient au problème général**

I.C.1) Montrer que  $h(x, t)$  est solution de :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g \sin \alpha}{3\nu} \cdot \frac{\partial h^3}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

I.C.2) Dédurre de l'équation (3) un ordre de grandeur de la durée  $\tau^*$  caractéristique de l'évolution temporelle de l'écoulement en fonction de  $g$ ,  $\alpha$ ,  $\nu$ ,  $h^*$  et  $L^*$ . Vérifier alors que l'hypothèse " $\partial \tilde{u} / \partial t$  négligeable" dans l'équation (1) est valide.

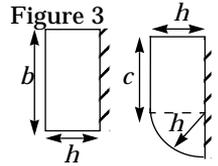
I.D - Dans cette question, on suppose qu'à l'instant  $t = 0$  une goutte de petite taille selon  $\vec{e}_x$ , de largeur  $L$  selon  $\vec{e}_y$  et invariante par translation selon  $\vec{e}_y$  est déposée au voisinage de  $x = 0$ . On note  $x_{av}(t)$  l'abscisse du front avant de l'écoulement à l'instant  $t$  (figure 1). On cherche une solution  $h(x, t)$  de l'équation (3) sous la forme :

$$h(x > x_{av}) = 0 \text{ et } h(x < x_{av}) = Cx^\beta \tilde{t}^{-\gamma} \quad (4)$$

I.D.1) Déterminer les constantes positives  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $C$ , puis écrire  $h(x, t)$  pour  $x < x_{av}$ .

I.D.2) Calculer l'aire  $S$  de la section de la goutte dans le plan  $xOz$  en fonction de  $x_{av}(t)$ ,  $g$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  et  $t$ . En déduire que  $x_{av}(t)$  est proportionnel à  $t^\delta$  où  $\delta$  est un exposant à déterminer.

I.D.3) Le modèle adopté prévoit une discontinuité de  $h$  en  $x_{av}(t)$ . En réalité, les phénomènes de tension superficielle limitent la raideur du front avant. On admet que ces phénomènes sont associés à une énergie potentielle  $AS$  où  $A > 0$  est le coefficient de tension superficielle et  $S$  l'aire de l'interface air-liquide. En comparant les deux formes de surface libre de la figure 3, évaluer  $c$  en fonction de  $h$  et  $b$  puis justifier le rôle modérateur de la tension superficielle.



Partie II - Etude expérimentale

On dépose à la date  $t = 0$  une goutte d'huile, milieu transparent d'indice  $n$ , dont on veut mesurer la viscosité  $\nu$ , au sommet  $O$  d'un miroir plan vertical  $(P)$  (figure 4a). La goutte s'étale en restant "accrochée" en  $O$  et engendre un film dont l'épaisseur  $h(x, t)$  du front arrière (figure 4b) s'écrit pour un modèle invariant par translation selon  $\hat{e}_y$  :

$$h(x, t) = \sqrt{\frac{\nu x}{gt}} \tag{5}$$

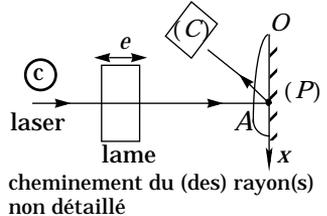
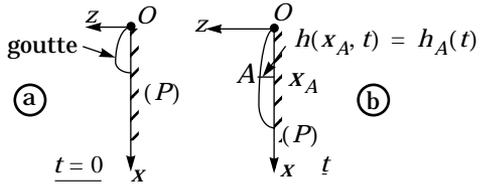


Figure 4

Un laser incident est dirigé sous incidence quasi-normale sur un point  $A$  de l'interface huile-air. La lumière réfléchie par le dispositif est ensuite récupérée par une photodiode  $(C)$  (figure 4c). Le signal électrique délivré par la photodiode est traité puis envoyé dans un dispositif de comptage. Des lentilles non représentées sur la figure permettent de focaliser le laser en  $A$  puis de faire l'image de  $A$  sur la cellule.

II.A - Dispositif de translation du laser

Pour régler  $x_A$  sans changer l'angle d'incidence du laser, on intercale sur son trajet une lame à faces parallèles d'épaisseur  $e$  et d'indice  $n_0$ . Lorsqu'elle est traversée par le faisceau laser sous incidence normale, le faisceau frappe l'huile au point  $A_0$  d'abscisse  $x_0$ . Lorsqu'on fait tourner la lame d'un petit angle  $\theta$ , l'abscisse du nouveau point d'impact  $A$  est  $x_A$  (figure 5).

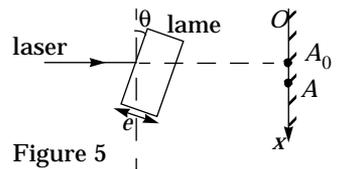


Figure 5

Exprimer  $x_A - x_0$  en fonction de  $\theta$ ,  $e$  et  $n_0$  en limitant les calculs à l'ordre un en  $\theta$ . Application numérique :  $n_0 = 1,5$  ; calculer  $e$  pour qu'une rotation  $\theta = 20^\circ$  provoque une translation du faisceau laser de 5 mm.

## II.B - Éclairement reçu par la photodiode

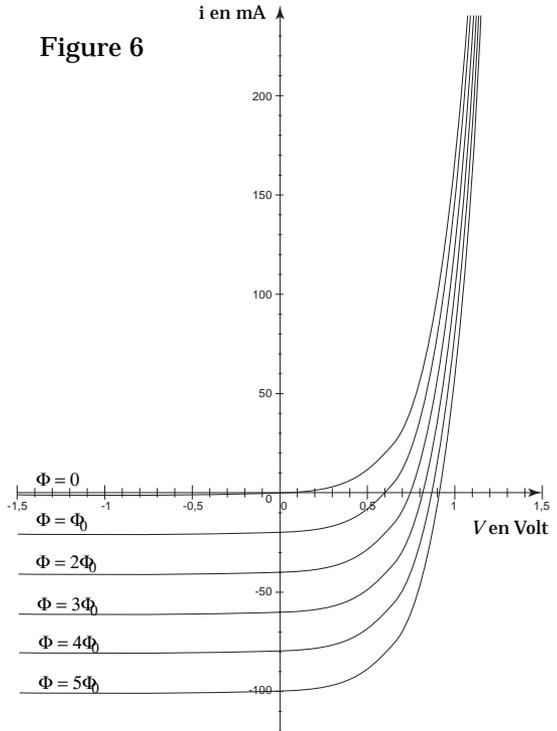
II.B.1) On observe un phénomène d'interférences pour lequel la différence de marche vaut  $\delta = 2nh_A(t)$  où  $n$  est l'indice de l'huile et  $h_A(t)$  l'épaisseur du film au point  $A$  à l'instant  $t$ . Quelles sont les deux ondes qui interfèrent ? Justifier brièvement que le contraste n'est pas optimum.

II.B.2) On suppose pour simplifier que les deux ondes qui interfèrent ont le même éclairement  $E_0$ . Établir l'expression de l'éclairement  $E_A$  au point  $A$  en fonction de  $E_0$ ,  $h_A(t)$ ,  $\lambda$  et  $n$ .

II.B.3) Le laser a un temps de cohérence  $\tau_c = 10^{-8}$  s. Cela entraîne-t-il en pratique une limitation sur l'épaisseur  $h$  admissible ?

## II.C - Traitement électronique

La caractéristique de la photodiode est donnée sur la figure 6 pour différentes valeurs de la puissance lumineuse  $\phi$  reçue. On réalise le montage de la figure 7 où l'amplificateur opérationnel est idéal et de gain infini.



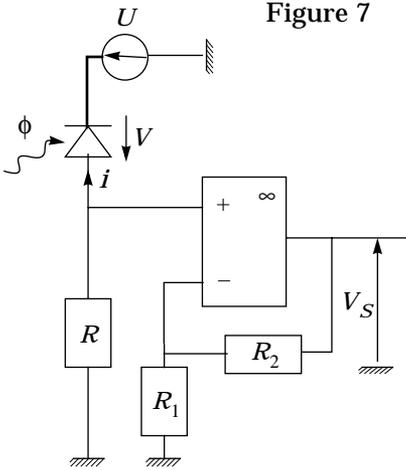


Figure 7

II.C.1) Exprimer la tension  $V$  aux bornes de la diode en fonction de  $R$ ,  $U$  et du courant  $i$  qui la traverse (figure 7).

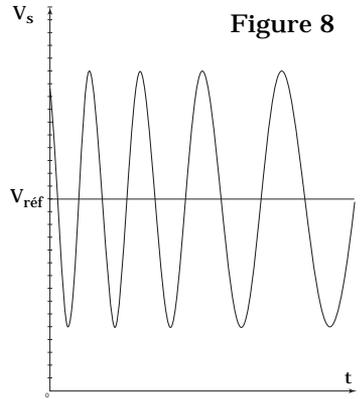


Figure 8

Comment faut-il choisir le signe de  $U$  pour que la tension  $V_s$  soit proportionnelle à  $\phi$ , ce qu'on suppose dans la suite.

II.C.2) La figure 8 donne l'allure du graphe de  $V_s(t)$  quand la goutte s'écoule, la photodiode captant une puissance lumineuse  $\phi$  proportionnelle à l'éclairement  $E_A$ . Commenter le comportement temporel.

On veut compter automatiquement les passages de  $V_s$  par un niveau de référence avec une pente  $dV_s/dt$  négative. On envoie  $V_s$  sur le montage de la figure 9 où  $V_{ref}$  est une tension de référence qui peut être ajustée par l'expérimentateur. Les amplificateurs opérationnels  $AO1$  et  $AO2$  sont supposés idéaux, de gain infini et de tensions de saturation  $\pm V_{sat}$ .

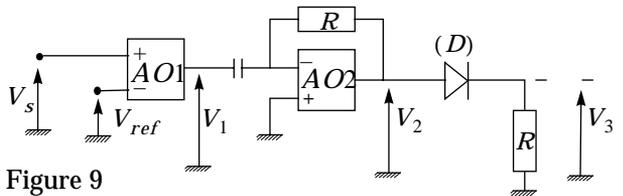


Figure 9

II.C.3) Déterminer  $V_1(t)$  et tracer l'allure de son graphe pour la valeur  $V_{ref}$  indiquée sur la figure 8.

II.C.4) On tient compte dans la suite de la vitesse de balayage finie  $\sigma$  de l' $AO1$  mais pas de celle de l' $AO2$ . Comment modifie-t-elle le graphe de  $V_1(t)$  ?

II.C.5) Montrer que  $V_2(t)$  est une suite d'impulsions rectangulaires, alternativement positives et négatives. Déterminer leur largeur  $\tau$  en proposant des valeurs réalistes de  $\sigma$  et  $V_{sat}$ .

II.C.6) La diode ( $D$ ) est supposée idéale. Montrer que  $V_3(t)$  permet la détection des seuls fronts descendants de  $V_s$ .

II.C.7) Dans toute la suite, on choisit le niveau de référence pour que l'ordre d'interférence correspondant aux impulsions détectées soit égal à  $p_k = k + 3/4$  avec  $k$  entier. Justifier qualitativement l'intérêt de ce choix de préférence à  $p_k = k + 1/2$  ou  $p_k = k$ .

## II.D - Exploitation des résultats

II.D.1) Quelle est la relation liant  $v$ ,  $x$ ,  $g$ ,  $t$ ,  $n^2$ ,  $\lambda^2$  et le carré  $p^2$  de l'ordre d'interférence  $p$  ?

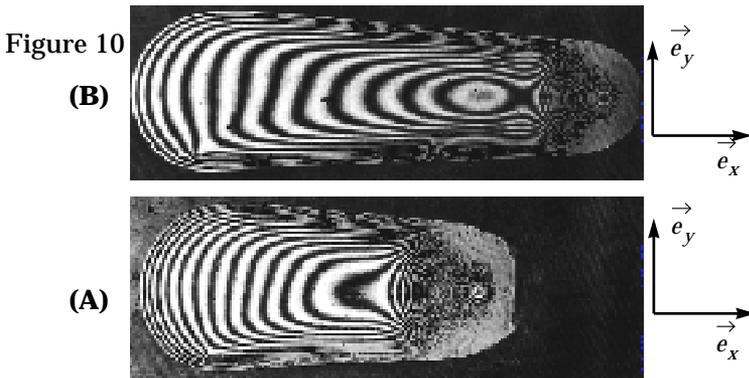
II.D.2) L'ordinateur donne un tableau des instants  $t_k$  associés à chaque valeur de  $p_k = k + 3/4$  mais il ne donne pas les valeurs de  $k$ . À l'instant  $t_1$  l'ordinateur compte une frange, et à l'instant  $t_2$  la centième frange. Montrer que l'on peut en déduire la valeur de  $k$  à l'instant  $t_1$ .

II.D.3) Pour  $x = 10$  mm, on obtient en moyenne  $p_k^2 t_k = 1,17 \times 10^6$  s. On donne  $\lambda = 638$  nm ;  $n = 1,40$ . En déduire la valeur numérique de  $v$ .

## II.E - Variante

Une variante de l'expérience consiste à éclairer le film d'huile sous incidence quasi-normale avec un faisceau laser élargi, couvrant toute la surface du miroir, puis à faire l'image du plan  $(P)$  sur une pellicule photographique.

La figure 10 montre deux interférogammes (A) et (B) obtenus à deux dates différentes : l'axe des  $x$ , orienté de la gauche vers la droite est la verticale descendante.



II.E.1) Comment réaliser un élargisseur augmentant l'aire de la section droite du faisceau d'un facteur 100 ? On dispose de lentilles convergentes de focales  $f_1 = 1 \text{ mm}$ ,  $f_2 = 1 \text{ cm}$  et  $f_3 = 10 \text{ cm}$ .

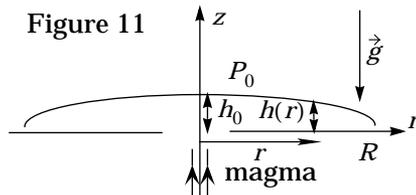
II.E.2) Comment faut-il choisir le temps de pose pour observer effectivement les franges d'interférences attendues ?

II.E.3) Vérifier que l'expression théorique (6) donnant  $h(x, t)$  est compatible qualitativement avec l'interférogramme (B) au voisinage du plan  $y = 0$  (plan médiateur de la goutte) dans le domaine des abscisses  $x$  où les franges sont quasiment parallèles à  $\hat{e}_y$ . Indiquer quel interférogramme est antérieur à l'autre.

II.E.4) Soient deux franges brillantes successives dans le plan  $y = 0$  suffisamment proches. Montrer que l'écart  $x_{p+1} - x_p$  entre leurs abscisses est inversement proportionnel à la pente  $dh/dx$  du profil au voisinage. Dédurre de l'interférogramme (B) l'allure du profil  $h(x, y = 0)$  réel de la goutte. Même question pour le profil  $h(x, y)$  réel pour  $x$  fixé.

### Partie III - Éruption d'un volcan

On s'intéresse ici à un modèle de l'éruption du volcan de la Soufrière de Saint-



Vincent en 1979. Le 13 avril 1979 le volcan entre brutalement en éruption, jusqu'au 26 avril. À partir de ce moment, un dôme de lave ayant la symétrie de révolution autour de la verticale est lentement extrudé au niveau du fond du cratère (figure 11). Pendant les 5 mois d'existence de ce dôme de lave, une équipe de chercheurs a effectué des mesures précises de sa hauteur maximale  $h_0(t)$  et

de son rayon  $R(t)$ . On a représenté sur les figures 12a et 12b les graphes de  $R(t)$  et  $h_0(t)$  en échelle log-log, avec  $R$  et  $h_0$  en mètres et  $t$  en secondes.

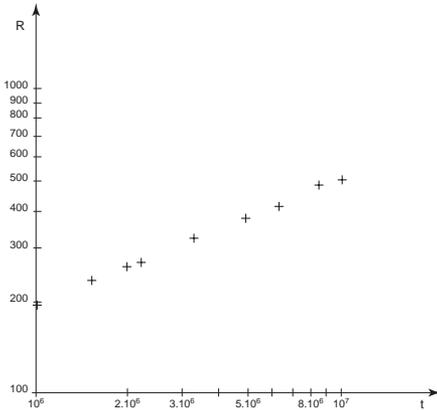


Figure 12 a

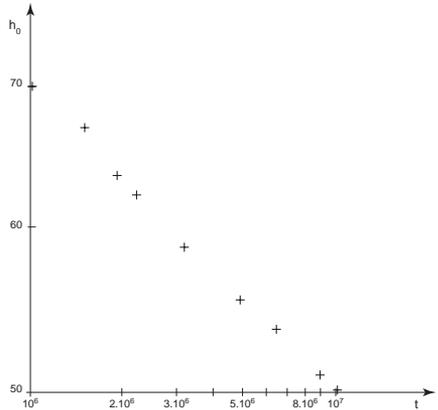


Figure 12 b

(échelles log-log)

**III.A** - Justifier que l'on peut écrire à partir de ces graphes les deux lois suivantes :

$$R(t) = at^p \text{ et } h_0(t) = bt^q \tag{6}$$

et donner les valeurs expérimentales de  $p$ ,  $q$ ,  $a$  et  $b$ .

**III.B** - Pour interpréter ce comportement, on suppose que les termes visqueux dominant les termes inertiels dans l'équation (1) et on utilise des arguments d'analyse dimensionnelle pour relier les paramètres du problème. L'écoulement est supposé quasi-radial et on note  $U$  l'ordre de grandeur de la vitesse. Par exemple, on écrit le volume du dôme :  $V = h_0 R^2$  pour exprimer en ordre de grandeur le volume à un coefficient numérique près que l'on suppose voisin de 1.

III.B.1) Montrer que la pression au sein du dôme est de la forme  $p(r, z) = p_0 + \rho g(h(r) - z)$ . En déduire en ordre de grandeur l'expression de la composante horizontale de la résultante des forces de pression sur une particule de fluide de volume  $d\tau$  en fonction de  $\rho$ ,  $g$ ,  $h_0$ ,  $R$  et  $d\tau$ .

III.B.2) Exprimer de la même façon en ordre de grandeur la force de viscosité sur une particule de fluide de volume  $d\tau$  en fonction de  $U$ ,  $\eta$ ,  $h_0$  et  $d\tau$ .

III.B.3) En déduire que, en ordre de grandeur :

$$\frac{R}{h_0^3} \frac{dR}{dt} = \frac{g}{v} \tag{7}$$

III.B.4) Vérifier la cohérence avec la mesure des exposants  $p$  et  $q$  et calculer un ordre de grandeur de la viscosité cinématique  $\nu$  de la lave. Comparer avec les ordres de grandeurs usuels et commenter.

**III.C** - Le dôme est alimenté par un puits cylindrique de rayon  $r$  (figure 13) et d'axe  $Oz$  où  $Oz$  est la verticale descendante.

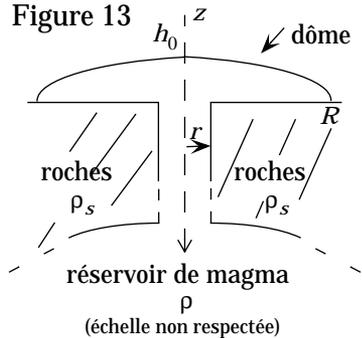
Dans un modèle simple où la température  $T$  est uniforme dans l'écoulement et où la masse volumique des roches qui entourent le puits est uniforme et égale à  $\rho_s$ , le débit volumique vaut en ordre de grandeur :

$$D_V = \frac{(\rho_s - \rho)gr^4}{\eta} \quad (8)$$

III.C.1) Vérifier la pertinence de la relation (8)

par analyse dimensionnelle. Indiquer qualitativement ce qui fait monter la lave et interpréter le rôle de  $\rho_s - \rho$  dans l'expression de  $D_V$ .

III.C.2) Montrer que les expériences conduisent à un débit volumique  $D_V = \gamma t^s$  et déterminer  $s$ . Interpréter le signe de  $s$  à l'aide de la relation (8) en examinant intuitivement l'évolution dans le temps des paramètres  $T$ ,  $\rho$ ,  $\eta$  et  $r$  de l'écoulement dans le puits.



••• FIN •••