

Un système de communication

On se propose d'examiner quelques phénomènes mis en œuvre dans un système de communication, ainsi que quelques méthodes utilisées pour coder des informations. Dans tout le problème, le souligné est utilisé pour dénoter les grandeurs complexes (\underline{Z} , $\underline{\vec{A}}$) où $j^2 = -1$.

Partie I - Rayonnement d'une antenne

I.A - Dans les parties I et II, l'atmosphère terrestre est considérée comme un milieu dont les propriétés sont celles du vide : $\epsilon_0 = (1/36\pi) \times 10^{-9} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$.

Un élément de courant $i(t)dz\vec{e}_z$, placé à l'origine O des espaces, le long de l'axe (O, \vec{e}_z) , crée, en un point M repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, φ (figure 1), un potentiel vecteur :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 i(t-r/c)}{4\pi r} dz \vec{e}_z$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

I.A.1) Le courant $i(t) = I \cos \omega t$ est sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude I . Donner, en notation complexe, l'expression $\underline{d\vec{A}}$ du potentiel vecteur en M en introduisant le nombre d'onde $k = \omega/c$.

I.A.2) Pourquoi, dans la zone de rayonnement $r \gg \lambda$ (λ longueur d'onde du rayonnement), est-il pertinent, lors d'une dérivation spatiale de $d\vec{A}$, de négliger les termes résultant du facteur $1/r$ devant ceux résultant de l'exponentielle ?

I.A.3) Identifier parmi les deux expressions données en notation complexe ci-dessous, celle du champ magnétique $d\vec{B}$ et celle du champ électrique $d\vec{E}$ créés en un point M de la zone de rayonnement, par l'élément de courant $i(t)dz\vec{e}_z$. Justifier votre choix.

$$j\omega \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \sin \theta dz \vec{e}_\theta,$$

$$jk \frac{I}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \sin \theta dz \vec{e}_\varphi$$

On rappelle éventuellement que :

$$\text{rot}(\underline{f\vec{a}}) = \underline{f} \text{rot}(\underline{\vec{a}}) + \underline{\text{grad}}(f) \wedge \underline{\vec{a}} \text{ et } \underline{\text{grad}}(f(r, \theta, \varphi)) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

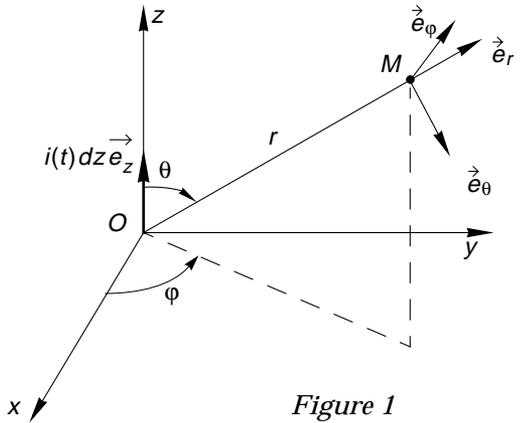


Figure 1

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\varphi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

I.A.4) Vérifier que le champ électromagnétique ($d\vec{E}, d\vec{B}$) possède, dans ces conditions et localement, la structure d'une onde plane progressive dans la direction \vec{e}_r .

I.B - Une antenne demi-onde est constituée d'un fil rectiligne de longueur $L = \lambda/2$ colinéaire à l'axe (O, \vec{e}_z) et de point milieu O origine des espaces (figure 2). Alimentée par un amplificateur de puissance non représenté, elle est parcourue par un courant $i(z, t) = I_0 \cos(\pi z/L) \cos \omega t$.

I.B.1) Exprimer le courant d'antenne en notation complexe $\underline{i}(z, t)$.

I.B.2) On souhaite déterminer le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ en M dans la zone de rayonnement.

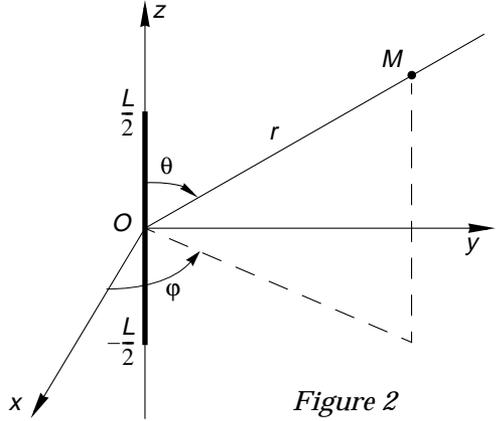


Figure 2

a) Pour ce faire, on considère un élément de courant $\underline{i}(z, t) dz \vec{e}_z$, au point N de l'antenne à la cote z . Exprimer en fonction de z et θ , la différence de marche δ entre les ondes rayonnées en N et O dans la direction (θ, φ) .

b) Déterminer, en notation complexe, l'expression du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ rayonné par l'antenne en M dans la direction (θ, φ) . On donne :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x e^{j a x} dx = \frac{2 \cos(a\pi/2)}{1 - a^2}$$

c) En déduire le champ électrique cherché :

$$\vec{E}(M, t) = -c \frac{\mu_0 I_0 \cos((\pi/2) \cos \theta)}{2\pi r \sin \theta} \sin(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$$

I.B.3) Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ rayonné par l'antenne.

I.B.4) Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et la moyenne temporelle de sa norme $\langle \Pi \rangle$.

I.B.5) Sachant que

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2(\langle \pi/2 \rangle \cos \theta)}{\sin \theta} d\theta = 1,22,$$

calculer la puissance moyenne P rayonnée par cette antenne.

I.B.6) Par définition, la résistance de rayonnement d'une antenne demi-onde est la résistance R_r définie par $P = R_r I_0^2 / 2$ où I_0 est l'intensité au ventre d'intensité de l'antenne. Déterminer R_r pour une antenne demi-onde et justifier la dénomination de résistance de rayonnement. Calculer numériquement R_r . Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0 pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est $P = 2100\text{kW}$ (puissance de l'émetteur Grande Ondes de France Inter à Allouis).

Partie II - Propagation entre l'ionosphère et la terre

II.A - Les ondes électromagnétiques rayonnées par l'antenne rencontrent l'ionosphère qui est l'ensemble des couches atmosphériques situées entre 60km et 300km d'altitude. Ces dernières se modélisent en un gaz ionisé (plasma) occupant un milieu transparent dont la permittivité ϵ_0 et la perméabilité μ_0 sont celles du vide. Ce plasma, électriquement neutre, est constitué d'ions pratiquement immobiles et d'électrons de charge $-e = -1,6 \times 10^{-19}\text{C}$ et de masse $m = 9,1 \times 10^{-31}\text{kg}$. Bien que la structure de l'ionosphère soit complexe, nous supposons que le nombre d'électrons par unité de volume est uniforme et égal à $N = 10^{12}\text{m}^{-3}$. En outre, nous admettons que les interactions entre particules ainsi que leur agitation thermique peuvent être négligées. Cela étant, considérons une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique et polarisée rectilignement, se propageant dans une direction Oz orthogonale à l'interface (plan $z = 0$) de l'atmosphère et de l'ionosphère (figure 3). Sur l'interface, son champ électrique $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$ donne naissance à :

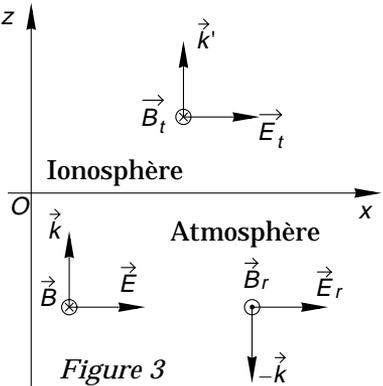


Figure 3

- un champ électrique transmis $\vec{E}_t = E_{0t} e^{j(\omega t - k'z)} \vec{e}_x$ ($z > 0$)
- un champ électrique réfléchi $\vec{E}_r = E_{0r} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_x$.

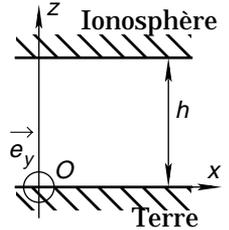
II.A.1) En négligeant la force magnétique, donner l'expression, en notation complexe, de la vitesse \vec{v}_e des électrons ionosphériques dans le champ électromagnétique transmis. En déduire le vecteur densité de courant de conduction \vec{j} créé par ce champ.

II.A.2) Écrire les équations locales vérifiées par le champ électromagnétique dans l'ionosphère et établir l'équation de propagation du champ électrique \vec{E}_t . Démontrer la relation de dispersion $k^2 = (\omega^2/c^2)(1 - \omega_p^2/\omega^2)$ où ω_p est la pulsation plasma dont on donnera l'expression en fonction de N , e , m et ϵ_0 . Calculer numériquement la fréquence plasma $f_p = \omega_p/2\pi$. Les ondes émises par France Inter G.O., de fréquence $f \approx 164\text{kHz}$, peuvent-elles se propager dans l'ionosphère ? On rappelle que : $\text{rot}(\text{rot}(\vec{a})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta\vec{a}$.

II.A.3) Donner les conditions aux limites (en $z = 0$) que vérifient les champs électriques et magnétiques des trois ondes incidente, transmise et réfléchie, ainsi que les relations, d'une part entre \vec{B} et \vec{E} , d'autre part entre \vec{B}_t et \vec{E}_t et enfin entre \vec{B}_r et \vec{E}_r .

II.A.4) Établir l'expression du coefficient de réflexion en amplitude $r = E_{0r}/E_0$ de l'interface atmosphère-ionosphère et en déduire celle de son facteur de réflexion en puissance $R = |r|^2$. Exprimer r et R en fonction du paramètre η défini par $\eta^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$. Comment se comporte cette interface vis à vis des ondes électromagnétiques de pulsation $\omega < \omega_p$? Conclure que les ondes rayonnées par l'émetteur de France Inter G.O. sont totalement réfléchies par l'ionosphère.

II.B - Les ondes électromagnétiques de cet émetteur sont réfléchies par l'ionosphère et aussi par la terre. On se propose d'examiner les conditions de cette propagation guidée en assimilant, dans la région étudiée, la terre et l'ionosphère à deux plans conducteurs parfaits parallèles, distants de h . Parmi les structures de champ pouvant se propager on ne s'intéressera qu'à la structure transverse électrique (T.E.) orthogonale à la direction Ox de propagation. Cette structure est définie, en notation complexe, par un champ électrique de la forme : $\vec{E}_g = E_g(y, z)e^{j(\omega t - k_g x)}\vec{e}_y$



II.B.1) Écrire l'équation de Maxwell-Gauss vérifiée par le champ électrique dans l'atmosphère entre les deux plans $z = 0$ et $z = h$ et déduire que $E_g(y, z)$ ne dépend en fait que de la seule coordonnée z .

II.B.2) Établir l'équation de propagation du champ électrique \vec{E}_g . Démontrer, en intégrant l'équation de propagation, que le champ électrique \vec{E}_g est de la forme : $\vec{E}_g = E_{g0}\sin(n\pi z/h)\cos(\omega t - k_g x)\vec{e}_y$ ($n \in \mathbb{N}$). Commenter la forme de l'expression obtenue et le fait que E_{g0} soit indépendant de x .

II.B.3) En ne retenant que le mode dominant ($n = 1$), en déduire la relation de dispersion des ondes guidées $k_g^2 = (\omega^2/c^2)(1 - \omega_c^2/\omega^2)$ où ω_c est une pulsation de coupure à expliciter en fonction de c et h . Calculer numériquement

$f_c = \omega_c/2\pi$. Les ondes rayonnées par France Inter G.O. peuvent elles se propager dans l'atmosphère entre l'ionosphère et la terre ?

Partie III - Modulation

III.A - Le champ électromagnétique rayonné par l'antenne doit être modulé pour qu'il puisse véhiculer des informations. Supposons d'abord que le signal de modulation soit sinusoïdal $v_m(t) = V_m \cos \omega_m t$. Ce signal module la porteuse $v_p(t) = V_p \cos \omega_p t$ qui est la tension appliquée à l'antenne d'émission en l'absence de modulation. La porteuse est fournie par un oscillateur sinusoïdal haute fréquence dont la fréquence d'oscillation $f_p = \omega_p/2\pi$ ($f_p \gg f_m = \omega_m/2\pi$) est particulièrement stable.

III.A.1) La modulation s'effectue à l'aide d'un circuit (figure 4) comprenant un multiplieur de constante multiplicative k et un additionneur. Montrer que le signal modulé est de la forme $v(t) = V_p(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_p t$ où m est l'indice de modulation que l'on explicitera.

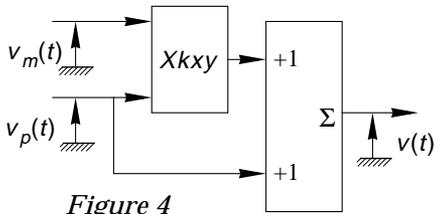


Figure 4

III.A.2) Afin de mesurer l'indice de modulation du signal porteur, on réalise les deux oscillogrammes représentés (figure 5). Quels sont les modes de l'oscilloscope utilisés pour la réalisation de chacun de ces oscillogrammes ? Exprimer l'indice de modulation en fonction des tensions extrémales $V_1 = 2V$, $V_2 = 18V$ et le calculer numériquement.

III.A.3) Déterminer le spectre de fréquences du signal modulé $v(t)$ et le représenter. En déduire, pour ce type de modulation, la largeur du spectre de fréquences nécessaire à la transmission d'un signal sinusoïdal de fréquence f_m .

III.A.4) En l'absence de modulation ($m = 0$), la puissance rayonnée par l'antenne est $P = 2100kW$. Quelle puissance P_t rayonne cette antenne quand l'indice de modulation m a la valeur calculée à la question III.A.2.

III.A.5) Plus généralement, le signal de modulation occupe une plage de fréquences $[f_{m1}, f_{m2}]$ (figure 6). Représenter le spectre de fréquences du signal modulé. En radiodiffusion $f_{m1} = 300Hz$ et $f_{m2} = 4,5kHz$, quelle est la largeur de la plage de fréquences occupée par le signal modulé ? Quel écart minimal de fréquence Δf_{min} doit-il exister entre les fréquences des porteuses de deux émetteurs pour que leurs émissions ne soit pas mutuellement brouillées ?

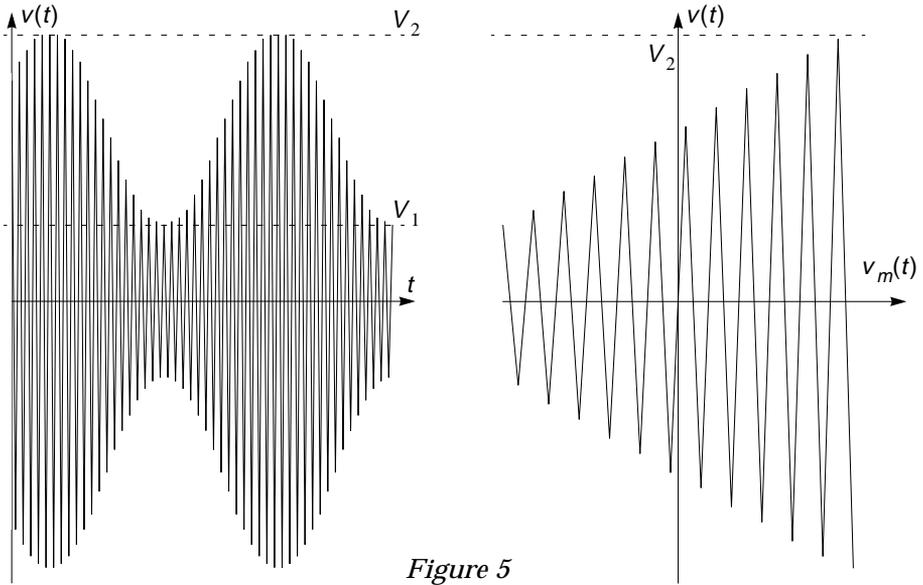


Figure 5

III.B - En fait, le signal modulé doit être amplifié avant d'être appliqué à l'antenne. Pour cela, on intercale entre la sortie du modulateur délivrant le signal $v(t)$ et l'antenne, un amplificateur sélectif dont le circuit équivalent est donné figure 7. La transconductance g de l'amplificateur est une constante réelle dans la bande de fréquences utilisée et le circuit (R,L,C) est accordé sur la fréquence f_p du signal porteur ($LC\omega_p^2 = 1$). Le facteur de qualité du circuit est $Q = R/L\omega_p$ où la résistance R inclut, pour l'essentiel, la résistance de rayonnement calculée dans la question I.B.6.

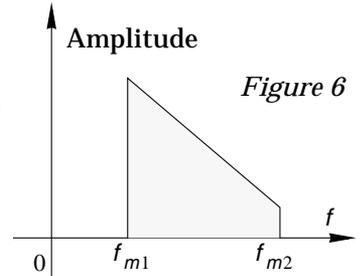


Figure 6

III.B.1) Calculer l'impédance complexe \underline{Z} du circuit (R,L,C) et montrer que pour des pulsations ω telles que $\Delta\omega = \omega - \omega_p \ll \omega_p$, elle peut s'écrire $\underline{Z}(j\omega) = R/(1 + j2Q\Delta\omega/\omega_p)$. En déduire les expressions du module $Z = |\underline{Z}|$ et de l'argument $\varphi = \arg(\underline{Z})$.

III.B.2) En déduire, que la tension $v'(t)$ à la sortie de l'amplificateur est $v'(t) = V'_p[1 + m'\cos(\omega_m t + \varphi')]\cos(\omega_p t)$, expression dans laquelle on explicitera V'_p , φ' et le nouvel indice de modulation m' . Commenter l'expression de $v'(t)$ obtenue.

III.B.3) À quelles conditions le signal amplifié $v'(t)$ est-il une image non déformée du signal modulé $v(t)$, lorsque la pulsation ω_m du signal de modulation varie entre ω_{m1} et ω_{m2} ? Vérifier que ces conditions sont réalisées lorsque $\omega_m/\omega_p \ll 1/(2Q)$.

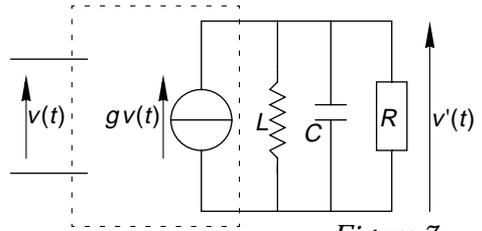


Figure 7

Partie IV - Démodulation

IV.A - L'antenne du récepteur capte un signal modulé qui est appliqué à l'entrée d'un amplificateur à commande automatique de gain (CAG), c'est-à-dire que ce signal sera d'autant plus amplifié que son amplitude au niveau de l'antenne est plus faible. L'amplificateur délivre un signal de la forme $v''(t) = V''_p(1 + m' \cos \omega_m t) \cos \omega_p t$ avec V''_p constante par CAG. Ce dernier signal est ensuite appliqué à l'entrée d'un démodulateur dont le rôle est de fournir un signal $v_d(t)$ image du signal de modulation $v_m(t) = V_m \cos \omega_m t$. Le démodulateur (figure 8) comprend un oscillateur local délivrant un signal $v_0(t) = V_0 \cos \omega_p t$ synchrone de la porteuse, un multiplieur de constante multiplicative k , un filtre passe-bas F_1 idéal d'amplification $K_1 = 1$ pour $f \leq f_p$ et un filtre F_2 dont l'amplificateur opérationnel est idéal.

IV.A.1) Déterminer la fonction de transfert $H_2(j\omega)$ du filtre F_2 . Quel est le type de ce filtre? Quelle est l'amplification K_2 de ce filtre en bande passante? Calculer R pour avoir une fréquence de coupure à $f_{m1}/10$ sachant que $C = 100\text{nF}$. Quel est le rôle de l'amplificateur opérationnel? Tracer le diagramme de Bode (courbe de réponse en gain et courbe de réponse en phase) de F_2 .

IV.A.2) Établir l'expression du signal démodulé $v_d(t)$ à la sortie du filtre F_2 .

IV.A.3) On isole à l'aide d'un soustracteur la composante continue U du signal $u(t)$ en utilisant les signaux délivrés par les filtres F_1 et F_2 . Exprimer U . Quel renseignement nous fournit cette composante continue et à quoi peut-on l'utiliser?

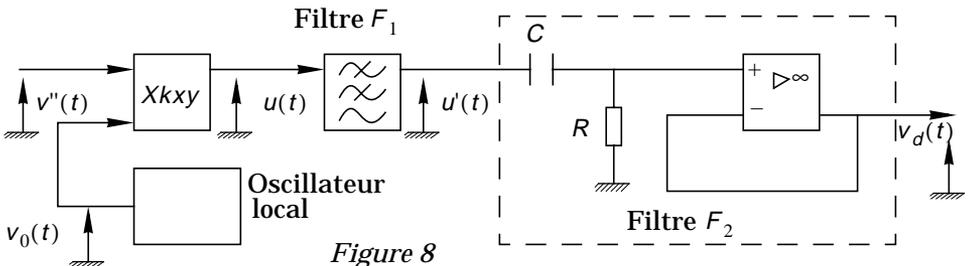


Figure 8

IV.B - En fait, il est pratiquement impossible de réaliser un oscillateur local parfaitement synchrone de la porteuse. En effet, la phase instantanée de l'oscillateur local est de la forme $\omega_p t + \varphi_0(t)$ où $\varphi_0(t)$ est une fonction aléatoire du temps avec $|d\varphi_0/dt| \ll \omega_p$.

IV.B.1) Dans cette hypothèse, calculer le signal $v'_d(t)$ délivré par le démodulateur. Conclure que l'amplitude du signal démodulé fluctue aléatoirement et détermine le signal audible (fading).

IV.B.2) Pour corriger ce défaut, on remplace l'oscillateur local par un circuit alimenté par la tension modulée $v''(t)$ et dont le rôle est de fournir une tension sinusoïdale $v'_0(t)$ parfaitement synchrone de la porteuse. Ce circuit réalise une "boucle à verrouillage de phase" (figure 9). Il est constitué d'un oscillateur commandé en tension OCT délivrant un signal $v'_0(t)$ d'amplitude constante V_0 et de phase instantanée $\omega_p t + \varphi_0(t)$, c'est-à-dire de pulsation instantanée $\omega_p + d\varphi_0/dt$ avec $d\varphi_0/dt = av_c(t)$ où $v_c(t)$ est la tension de commande de l'OCT et a une constante dimensionnée réelle positive telle qu'à tout instant : $|av_c(t)| \ll \omega_p$. Le circuit comprend, en outre, un multiplieur de constante multiplicative k , un filtre passe-bas idéal F_3 qui transmet sans atténuation les signaux de fréquence $f \leq f_p$ et, enfin, un circuit déphaseur introduisant un déphasage de $\varphi = -\pi/2$ à la fréquence f_p . Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\varphi_0(t)$?

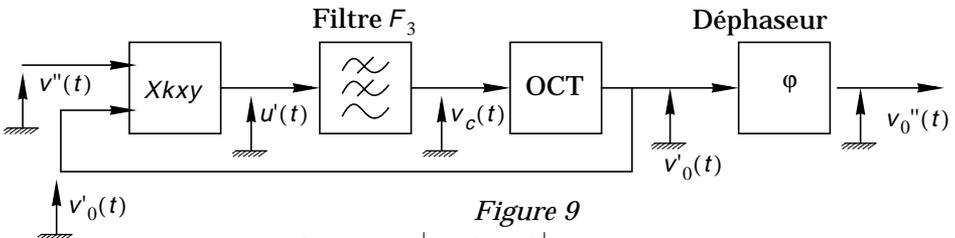


Figure 9

IV.B.3) Sachant que $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$, intégrer l'équation différentielle précédente et montrer que la boucle se verrouille, c'est-à-dire que $\varphi_0(t)$ tend vers $\pi/2$ et que la pulsation de l'OCT tend vers ω_p pulsation de la porteuse.

IV.B.4) Cependant, une fois la boucle verrouillée, peut-on substituer le signal $v'_0(t)$ délivré par l'OCT à celui $v_0(t)$ délivré initialement par l'oscillateur local (figure 8) ? Quel est le rôle du déphaseur ?

••• FIN •••