

PRINCIPES ET APPLICATIONS DES MESURES GRAVIMÉTRIQUES

La gravimétrie est une discipline fondamentale de la géophysique qui consiste à mesurer et à étudier les variations spatiales et temporelles du champ de pesanteur de la Terre.

Son champ d'application est vaste, on peut citer les exemples suivants :

- La connaissance de la structure interne du globe terrestre en particulier la présence d'hétérogénéités de masse dans le sous-sol.
- L'exploitation de ressources minières.
- L'analyse de la stabilité d'un sol avant la construction d'une voie ferrée.
- L'étude des orbites des satellites artificiels...

Ce problème comporte quatre parties indépendantes :

Partie A : Etude des anomalies gravimétriques, applications à l'étude du sous-sol.

Après une étude rapide des principales causes des variations à grande échelle de l'intensité du champ de pesanteur terrestre, on s'intéresse à l'utilisation des fluctuations locales de l'intensité de ce champ pour détecter des cavités et des hétérogénéités dans le sous-sol.

Partie B : Aspects physico-chimiques de la formation des cavités souterraines.

Dans cette courte partie, on se propose de comprendre l'un des mécanismes de formation des gouffres et des cavités souterraines dans un massif calcaire.

Partie C : Mesures de l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

Cette partie aborde de manière simple les principes utilisés par deux types de « gravimètres » récents : un gravimètre relatif à lévitation de sphère supraconductrice et un gravimètre absolu à chute.

Partie D : La forme de la Terre

Cette partie étudie un modèle simple qui permet de rendre compte de la forme aplatie de la Terre.

Le problème comporte de nombreuses questions qualitatives qui demandent des réponses concises et pertinentes. Les candidats doivent également veiller à donner un nombre de chiffres significatifs adapté lors des applications numériques.

Les candidats sont invités à consigner toutes remarques ou commentaires qu'ils jugeront intéressants de formuler sur un point ou un autre abordé par le problème.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Données numériques :

- Pour les mesures de l'intensité du champ de pesanteur, les géophysiciens utilisent fréquemment le Gal : $1 \text{ Gal} = 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$. Son nom a été donné en hommage à Galilée. On définit également :
 - le milligal : $1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$ et
 - le microgal : $1 \mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ m.s}^{-2}$.
- - rayon de la Terre : $R_T = 6370 \text{ km}$
 - masse de la Terre : $M_T = 5,974.10^{24} \text{ kg}$
 - constante de gravitation universelle : $G = 6,673.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$

Données mathématiques :

- $(1+x)^n \approx 1+nx$ si $|x| \ll 1$ et $n \in \mathbb{Z}$.
- Volume d'une sphère de rayon R : $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Partie A : Etude des anomalies gravimétriques, applications à l'étude du sous-sol.

1. Le champ de pesanteur terrestre.

1.1. Première étude du champ de pesanteur terrestre.

La Terre de masse M_T et de centre T est supposée bien modélisée par une répartition de masse à symétrie sphérique de rayon R_T . Un point matériel de masse m est placé en un point M situé à une distance r, supérieure à R_T , du centre T de la Terre. On note G la constante de gravitation universelle.

1.1.1. Citer le nom du savant qui a énoncé la loi de la gravitation.

1.1.2. Rappeler les caractéristiques de la force d'interaction gravitationnelle \vec{F}_G exercée par la Terre sur un point matériel de masse m : direction, sens et intensité.

1.1.3. Proposer une expression mathématique pour cette force \vec{F}_G , en fonction de G, M_T , m, r et $\vec{u} = \frac{\vec{TM}}{\|\vec{TM}\|}$ vecteur unitaire. On rappelle que $r = \|\vec{TM}\|$.

1.1.4. Effectuer une première estimation numérique de l'intensité du champ de pesanteur terrestre défini, en première approximation, par le rapport $\frac{\|\vec{F}_G\|}{m}$ calculé à la surface de la Terre.

1.1.5. Donner les caractéristiques de la force exercée par le point matériel de masse m sur la Terre.

1.2. Etude plus précise du champ de pesanteur terrestre .

Le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique supposé galiléen. On choisit pour repère (T, x_T , y_T , z_T).

La Terre, assimilée à une sphère de rayon R_T , est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe fixe Tz_T à la vitesse angulaire $\omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On note t le temps.

On repère un point P de la surface de la Terre situé sur l'équateur par l'angle ωt que fait le segment TP avec l'axe Tx_T . On introduit les deux vecteurs unitaires : $\vec{u} = \frac{\vec{TP}}{\|\vec{TP}\|}$ et \vec{u}_1 le vecteur tangent à l'équateur au point P . Ces deux vecteurs sont représentés sur la figure 1.

Ce point P décrit une trajectoire circulaire et est animé d'un mouvement uniforme.

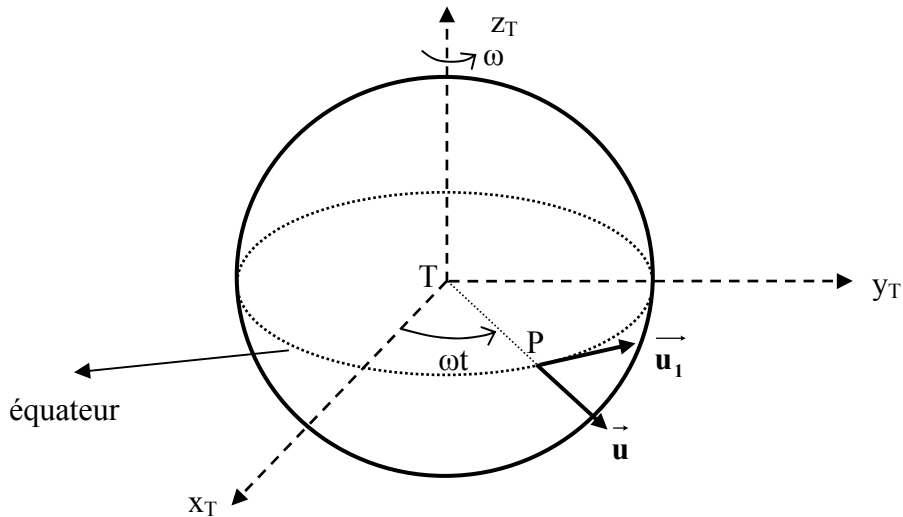


figure 1

1.2.1. Etude cinématique.

- Justifier la valeur numérique choisie pour la vitesse angulaire ω .
- Exprimer le vecteur vitesse \vec{V} du point P par rapport au référentiel géocentrique en fonction de R_T , ω et \vec{u}_1 . Calculer numériquement l'intensité de cette vitesse.
- Exprimer de même le vecteur accélération \vec{a} du point P par rapport au référentiel géocentrique en fonction de R_T , ω et \vec{u} . Calculer la valeur numérique de l'intensité du vecteur accélération.

1.2.2. Deuxième estimation de l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

Le point P représente maintenant un point matériel de masse m suspendu par un fil à un support au voisinage immédiat de la surface de la Terre. Situé au niveau de l'équateur, il est immobile par rapport à la surface de la Terre donc est animé, par rapport au référentiel géocentrique, du mouvement circulaire uniforme dont l'étude cinématique a été conduite à la question 1.2.1. de cette partie.

La figure 2 illustre la situation étudiée ; naturellement les échelles ne sont pas respectées.

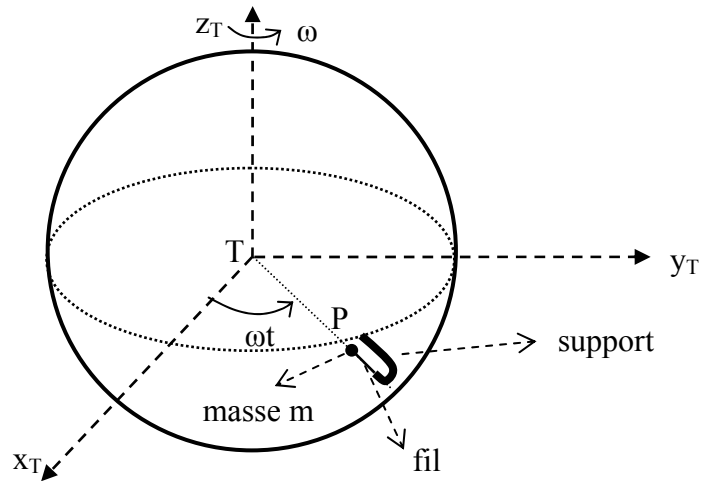


figure 2

- Rappeler la définition d'un référentiel galiléen.
- Effectuer un bilan des forces qui agissent sur le point matériel P de masse m. On introduira en particulier la force \vec{T}_0 exercée par le fil sur la particule P.
- Enoncer la seconde loi de Newton, l'appliquer à la masse ponctuelle P dans le référentiel géocentrique et obtenir une relation entre l'accélération \vec{a} , \vec{F}_G , \vec{T}_0 et m.
- On définit le poids d'un corps $m\vec{g}$ par la relation $m\vec{g} = -\vec{T}_0$. Justifier qualitativement cette définition.
- On pose $\vec{g} = -g\vec{u}$. En utilisant les questions précédentes, établir la relation
$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} - R_T\omega^2$$
. Commenter cette expression.

En 1672 Richer, horloger français, transporte une horloge à Cayenne en Guyane française et constate que celle-ci, parfaitement réglée à Paris, retarde de plus de 2 minutes par jour à Cayenne.

Newton et Huygens attribuent ce retard au mouvement de rotation de la terre sur elle-même et au fait que la Terre ne devait pas être une sphère mais une surface de révolution aplatie suivant l'axe des pôles.

Au 18^{ième} siècle, l'Académie Royale décide d'envoyer deux expéditions pour mesurer la longueur d'un arc de méridien terrestre : l'une près du pôle nord, l'autre près de l'équateur. Clairaut et Maupertuis allèrent en Laponie en 1736 ; Bouguer et La Condamine au Pérou en 1735. Ils confirment l'hypothèse de Newton sur la forme aplatie de la Terre.

La forme de la Terre est une « sphère » aplatie aux pôles ; la distance du centre aux pôles est $R_P = 6357$ km et le rayon à l'équateur est $R_E = 6378$ km.

En prenant en compte les deux effets : rotation de la Terre et forme de la Terre, on rend compte correctement des valeurs mesurées :

Pôle nord	$g = 9,832 \text{ m.s}^{-2}$
Paris	$g = 9,809 \text{ m.s}^{-2}$
Cayenne	$g = 9,780 \text{ m.s}^{-2}$

- f. Déterminer numériquement en utilisant le modèle précédent la valeur de g à l'équateur et au pôle nord ; discuter la compatibilité de ces résultats avec ceux fournis dans le tableau précédent.

1.3. Influence de la Lune et du Soleil.

Une masse ponctuelle située à la surface du globe terrestre subit également l'attraction des corps massifs externes en particulier de la Lune et du Soleil.

L'intensité du champ de pesanteur varie donc au cours du temps en faisant apparaître des durées typiques reliées aux différentes périodes associées à la rotation de la Terre sur elle-même, au mouvement de rotation de la Lune autour de la Terre et à celui de la Terre autour du Soleil.

Ces variations temporelles de g , intensité du champ de pesanteur, font l'objet de mesures très précises à l'aide de « gravimètres ». La figure 3 montre des mesures de celles-ci en région parisienne.

L'unité de mesure est le mGal où le Gal est une unité utilisée par les géophysiciens et dont la définition est donnée au début du problème.

**variations de la
« gravité » en mGal**

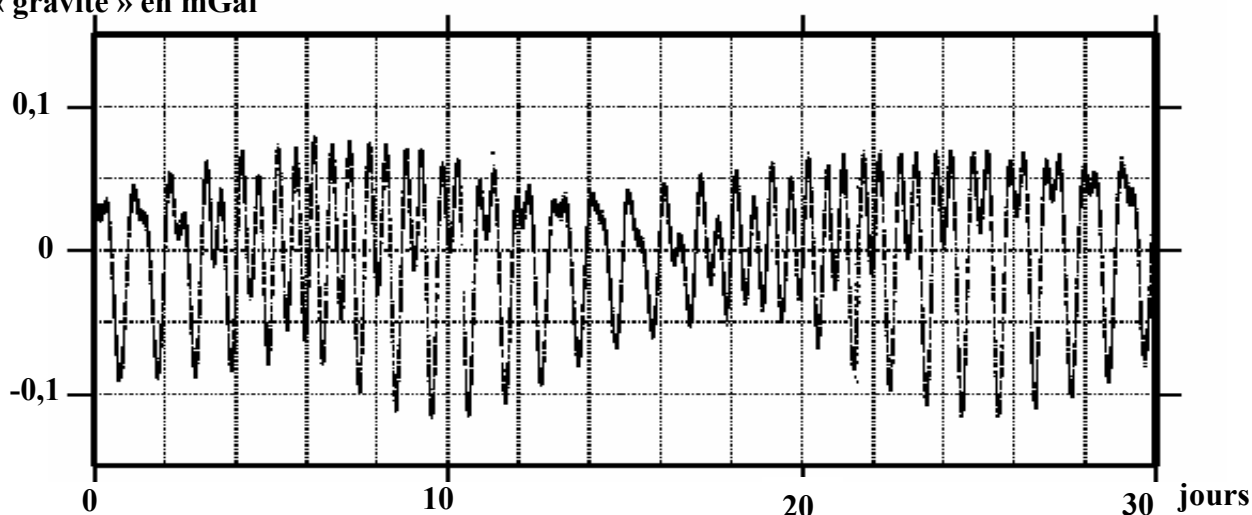


figure 3 : Variations temporelles de la gravité mesurée en région parisienne.

- 1.3.1. Justifier les ordres de grandeurs des durées typiques observées sur la courbe expérimentale de la figure 3.

1.3.2. Applications numériques.

Un modèle simplifié établit que l'amplitude des variations de l'intensité du champ de pesanteur terrestre dues à un astre A s'écrit $\frac{2GM_A R_T}{D_A^3}$; M_A est la masse de l'astre et D_A sa distance au centre de la Terre.

- a. Evaluer cette amplitude de variation dans le cas de la Lune de masse $M_L = 7,3 \cdot 10^{22}$ kg et située à la distance $D_L = 3,8 \cdot 10^8$ m de la Terre. On exprimera la valeur en mGal.
- b. Evaluer de même celle-ci dans le cas du Soleil de masse $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg et situé à la distance $D_S = 1,5 \cdot 10^{11}$ m de la Terre. On exprimera la réponse en mGal.

- c. Conclure sur l'influence relative de la Lune et du Soleil sur le phénomène de la variation temporelle de l'intensité du champ de pesanteur terrestre et montrer que ces résultats sont compatibles avec les valeurs expérimentales de la figure 3.

2. Détection des cavités et hétérogénéités dans le sous-sol

2.1. Introduction.

Pour pouvoir aborder la notion d'anomalie gravimétrique, il nous faut introduire la notion d'**ellipsoïde de référence**.

L'**ellipsoïde de référence** est une surface qui épouse au mieux la forme de notre planète indépendamment des accidents topographiques. C'est une surface de révolution qui se nomme GRS-80 et dont la définition a été stabilisée dans les années 1980.

Sur l'**ellipsoïde de référence** on peut déterminer une valeur de référence g_{ref} de l'intensité du champ de pesanteur. Cette valeur de référence dépend de la latitude φ du point considéré et vaut :

$$g_{ref} = 978031,85 \left(1 + 0,005302357 \sin^2 \varphi - 0,000005865 \sin^2 2\varphi \right) \text{ en mGal}$$

- 2.1.1. Faire un schéma simple permettant de définir la latitude φ d'un point à la surface de la Terre. Cette donnée suffit-elle à définir de façon unique la position de ce point ?

- 2.1.2. Commenter qualitativement cette expression.

2.2. Corrections gravimétriques.

On se propose d'étudier le champ de pesanteur en un point situé à une altitude h . Deux cas sont envisagés : l'espace entre le niveau de référence et le point M est constitué par de l'air, on parle alors de « correction à l'air libre » ; cet espace est occupé par un plateau, il s'agit de « correction de plateau ».

2.2.1. Correction à l'air libre.

Un point M est situé à une altitude h . L'espace compris entre le niveau de référence et ce point est occupé par de l'air. On suppose que $h \ll R_T$ et on peut se référer à la figure 4.

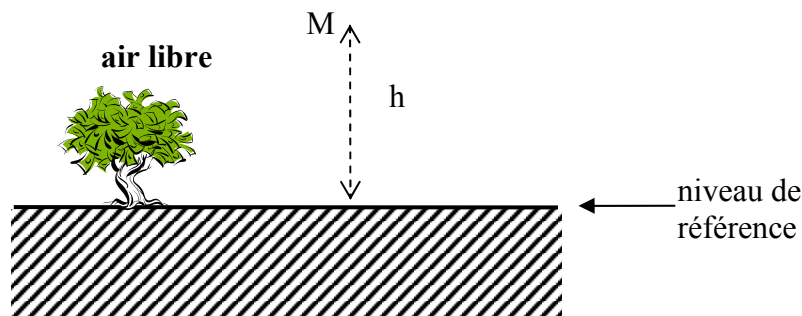


figure 4

- a. Indiquer qualitativement le sens de variation de g en fonction de h .
- b. En se plaçant dans les hypothèses de la question 1.1. de la partie A, établir l'expression de g en fonction de G , M_T , R_T et h .

- c. En utilisant l'approximation $\frac{1}{(R_T + h)^2} \approx \frac{1}{R_T^2} \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$, montrer que g peut s'écrire $g \approx g_0 - \alpha h$ où g_0 et α sont deux grandeurs à expliciter.
- d. Déterminer numériquement en mGal, la différence $g - g_0$ pour $h = 1038$ m.
- e. Lorsque la hauteur h varie de Δh en valeur absolue, g varie de Δg en valeur absolue. Avec les instruments modernes, la précision expérimentale sur la mesure de Δg est de l'ordre de $5 \mu\text{Gal}$, estimer la plus petite valeur de Δh mesurable et commenter ce résultat.

2.2.2. Correction de plateau.

L'espace entre le niveau de référence et M est à présent occupé par un « plateau » de masse volumique ρ_p . La figure 5 illustre la nouvelle situation étudiée.

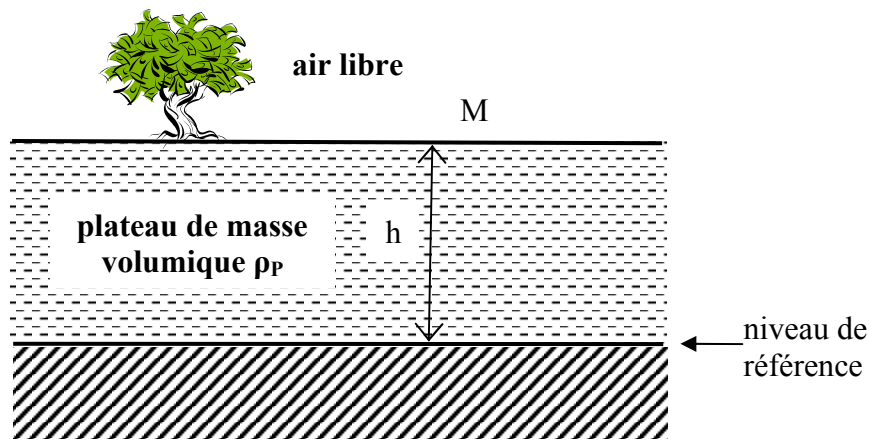


figure 5

On admet que l'intensité du champ de gravitation supplémentaire créé au point M par le plateau est donnée par l'expression : $2\pi G\rho_p h$. Cette correction est appelée correction de plateau.

- a. Montrer que la quantité $2\pi G\rho_p h$ possède bien les dimensions d'une accélération.
- b. Par un raisonnement qualitatif argumenté, indiquer si la correction de plateau accroît ou diminue l'intensité du champ de gravitation.
- c. Evaluer numériquement cette correction en mGal pour $h = 1038$ m et $\rho_p = 2,80 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- d. En utilisant le résultat de la question 2.2.1.c. de la partie A, donner l'expression littérale de la différence $g - g_0$ qui prend en compte les deux effets : correction d'air libre et correction de plateau.
- e. Evaluer numériquement cette différence en mGal pour $h = 1038$ m (altitude à la gare de Chamonix) et $\rho_p = 2,80 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

2.3. Anomalies gravimétriques.

L'anomalie gravimétrique, notée A_B , ou anomalie de Bouguer (en hommage au savant français Pierre Bouguer) est la différence entre la valeur mesurée, notée g_{mes} , et la valeur de référence corrigée des corrections d'air libre et de plateau, notée g_c . On a ainsi $A_B = g_{mes} - g_c$.

Elle nous donne des informations sur les hétérogénéités de la répartition des masses internes au globe terrestre.

L'étude de ces anomalies a de nombreuses applications : élaboration de modèles de la croûte terrestre, prospection, détection de cavités... Cette technique est naturellement souvent couplée avec d'autres méthodes d'analyse.

Nous allons illustrer le principe de l'étude gravimétrique sur des exemples simples.

2.3.1. Détection d'une cavité.

On suppose qu'une cavité de forme sphérique de rayon $R = 5$ m et située à une profondeur $H = 20$ m, est présente dans le plateau de masse volumique ρ_P comme le montre la figure 6. Le centre de la cavité a pour abscisse x_0 suivant un axe horizontal Ox . On prendra $\rho_P = 2,80 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

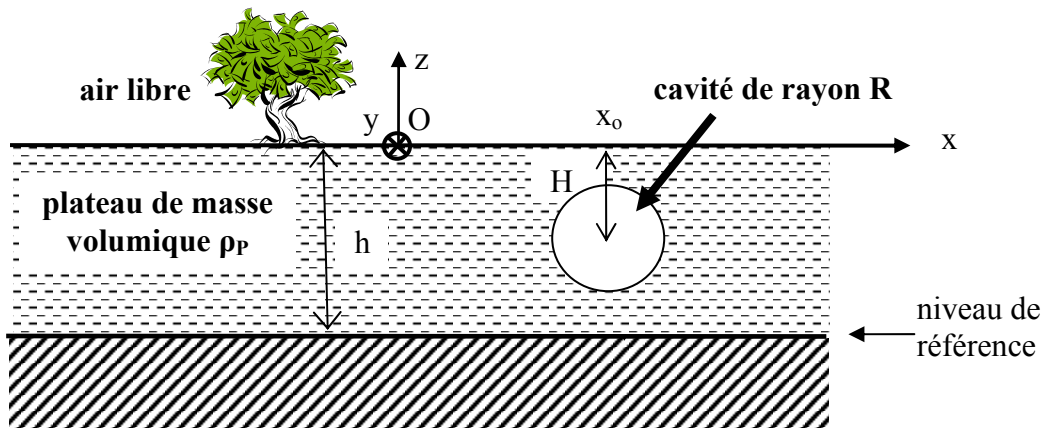


figure 6

On procède à une mesure de l'intensité du champ de pesanteur le long de l'axe Ox .

- Quelle serait la forme de la courbe donnant l'anomalie gravimétrique A_B en fonction de x en l'absence de cavité.
- Donner l'allure de cette courbe en présence de la cavité.
- Proposer une expression littérale de la valeur maximale A_{Bmax} de A_B en fonction de R , G , ρ_P et H .
- Evaluer numériquement A_{Bmax} en μGal et commenter ce résultat à la lumière des résultats de la partie **A** et sachant que la précision expérimentale sur la mesure des variations de g_{mes} est de l'ordre de $5 \mu\text{Gal}$.

2.3.2. Détection d'un dôme de sel au Texas.

La figure 7 propose un profil d'anomalie gravimétrique effectué selon le principe précédent mais pour le plan horizontal xOy . On y représente les courbes de niveau pour différentes valeurs de A_B exprimées en mGal .

On suppose que le sel a pour masse volumique $\rho = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et que la masse volumique moyenne des sédiments est $\rho_P = 2,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Le dôme de sel, de forme sphérique, est situé à une profondeur H de l'ordre de 6 km et possède un rayon R de l'ordre de 4 km.

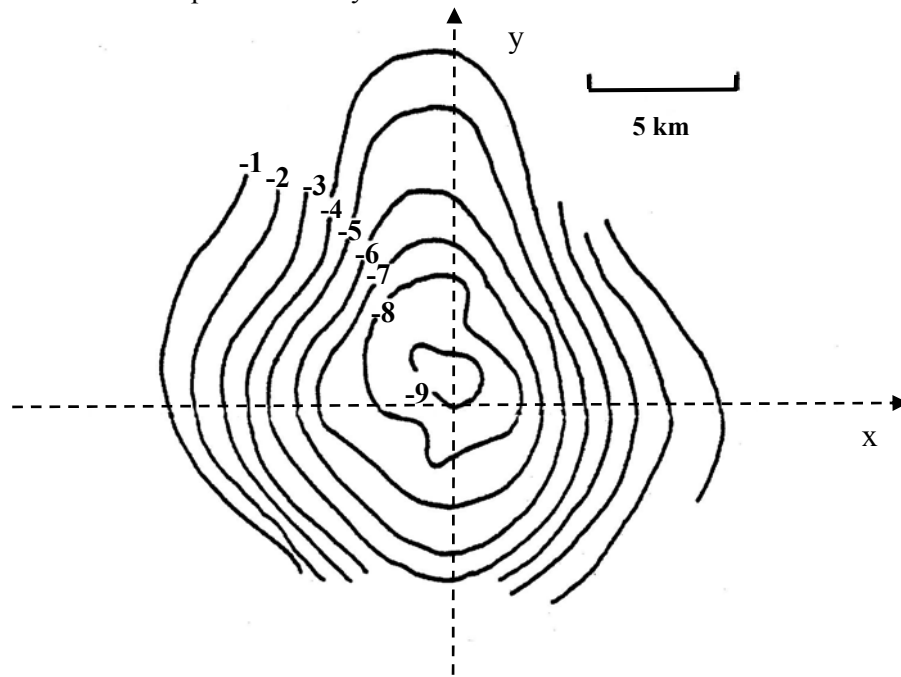


figure 7

- Justifier qualitativement le signe de l'anomalie gravimétrique observée sur le dôme de sel.
- Justifier l'ordre de grandeur de l'anomalie gravimétrique mesurée. On pourra introduire par exemple le « contraste de densité » $\Delta\rho = \rho - \rho_p$.

Une approche analogue a permis de construire la carte de la figure 8. Cette carte, qui utilise un relevé des variations du champ de pesanteur terrestre effectué très récemment, nous révèle un lac long de 240 km enfoui sous près de 4 km de glace sur le site de Vostok en Antarctique.

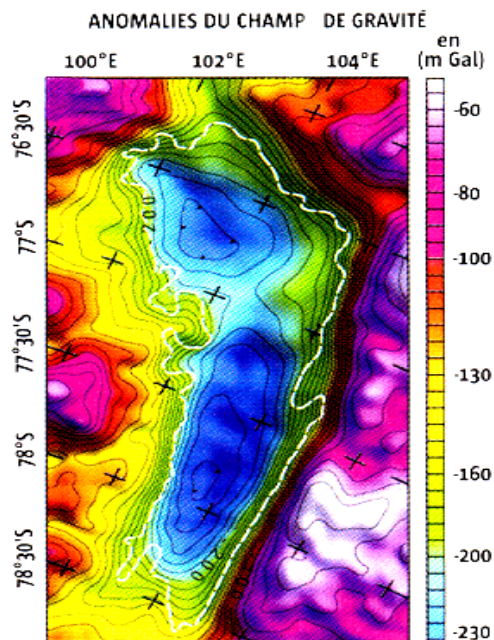


figure 8 : Le lac de Vostok (La Recherche (septembre 2004))

Partie B : Aspects physico-chimiques de la formation des cavités souterraines.

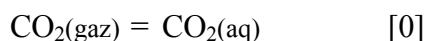
On se propose dans cette partie de comprendre l'un des mécanismes de formation des gouffres et cavités souterraines dans un massif calcaire.

Le calcaire est principalement formé de carbonate de calcium : la calcite $\text{CaCO}_3(\text{s})$. L'un des mécanismes d'érosion des sols et de formation des cavités en milieu calcaire est la dissolution de la calcite par l'eau de pluie.

Le calcaire, légèrement soluble dans l'eau pure, l'est beaucoup plus si l'acidité de la solution augmente. D'autre part l'acidité de l'eau dans ce type de milieu naturel dépend largement de la teneur en dioxyde de carbone CO_2 dissous. Pour comprendre le mécanisme de formation des cavités, nous allons étudier les échanges de matière en CO_2 à l'interface eau - atmosphère puis ceux en ions Ca^{2+} et CO_3^{2-} à l'interface eau - roche.

1. Echanges de dioxyde de carbone à l'interface eau-atmosphère.

1.1. On considère l'équation de la réaction chimique [0] entre le dioxyde de carbone présent dans l'atmosphère sous forme gazeuse : $\text{CO}_2(\text{gaz})$ et le dioxyde de carbone dissous en solution aqueuse : $\text{CO}_2(\text{aq})$.



Lorsque le système décrit par la réaction [0] est à l'équilibre, la concentration, exprimée en mol.L^{-1} , en $\text{CO}_2(\text{aq})$: $[\text{CO}_2(\text{aq})]$ est reliée à la pression partielle, exprimée en bar, en $\text{CO}_2(\text{gaz})$: $P_{\text{CO}_2(\text{gaz})}$ par la relation :

$$[\text{CO}_2(\text{aq})] = K_o \cdot P_{\text{CO}_2(\text{gaz})} \quad \text{avec } K_o = 3,2 \cdot 10^{-2}.$$

1.1.1. Actuellement la pression partielle moyenne en $\text{CO}_2(\text{gaz})$ dans l'atmosphère est évaluée à $3 \cdot 10^{-4}$ bar.

a. Commenter cette valeur en la comparant à d'autres valeurs pertinentes.

b. Que pensez-vous de son évolution au cours des dernières décennies ?

1.1.2. En déduire la concentration en $\text{CO}_2(\text{aq})$ dans une solution aqueuse initialement pure en équilibre avec cette atmosphère.

1.2. Le dioxyde de carbone dissous en solution aqueuse se comporte comme un « diacide » et met ainsi en jeu les deux réactions chimiques [1] et [2] dont les équations sont les suivantes :



1.2.1. Rappeler la définition d'un acide.

1.2.2. Donner, lorsque le système chimique décrit par les réactions [1] et [2] est à l'équilibre, les expressions des constantes d'acidité K_{A1} et K_{A2} relatives aux réactions [1] et [2] en fonction des concentrations à l'équilibre des différentes espèces en solution.

- 1.2.3. Justifier le terme de « diacide » utilisé pour caractériser les propriétés du dioxyde de carbone dissous en solution aqueuse.
- 1.2.4. Construire le diagramme de prédominance des espèces étudiées : $\text{CO}_2(\text{aq})$, $\text{HCO}_3^-(\text{aq})$ et $\text{CO}_3^{2-}(\text{aq})$ en fonction du pH. On donne $\text{p}K_{A1} = 6,2$ et $\text{p}K_{A2} = 10,2$.
- 1.2.5. Une eau initialement pure est en équilibre avec une atmosphère qui contient du dioxyde de carbone à la pression partielle de $3 \cdot 10^{-4}$ bar. Le pH de la solution obtenue vaut 5,6. En déduire les concentrations à l'équilibre de tous les ions présents dans la solution. Commenter ces valeurs en vous référant à la question précédente. On prendra $K_e = 1,0 \cdot 10^{-14}$ pour valeur du produit ionique de l'eau.

1.3. Dans les sols, la pression partielle en $\text{CO}_2(\text{gaz})$ peut être très supérieure et atteindre 0,1 bar. Ces fortes teneurs résultent de l'activité des plantes, des microorganismes du sol et surtout de la décomposition de la matière organique. Ainsi l'eau qui « percole » dans le sol s'enrichit en $\text{CO}_2(\text{aq})$.

La courbe de la figure 9 donne le pH d'une solution aqueuse initialement pure en équilibre avec une atmosphère contenant du dioxyde de carbone, en fonction de la pression partielle en $\text{CO}_2(\text{gaz})$:

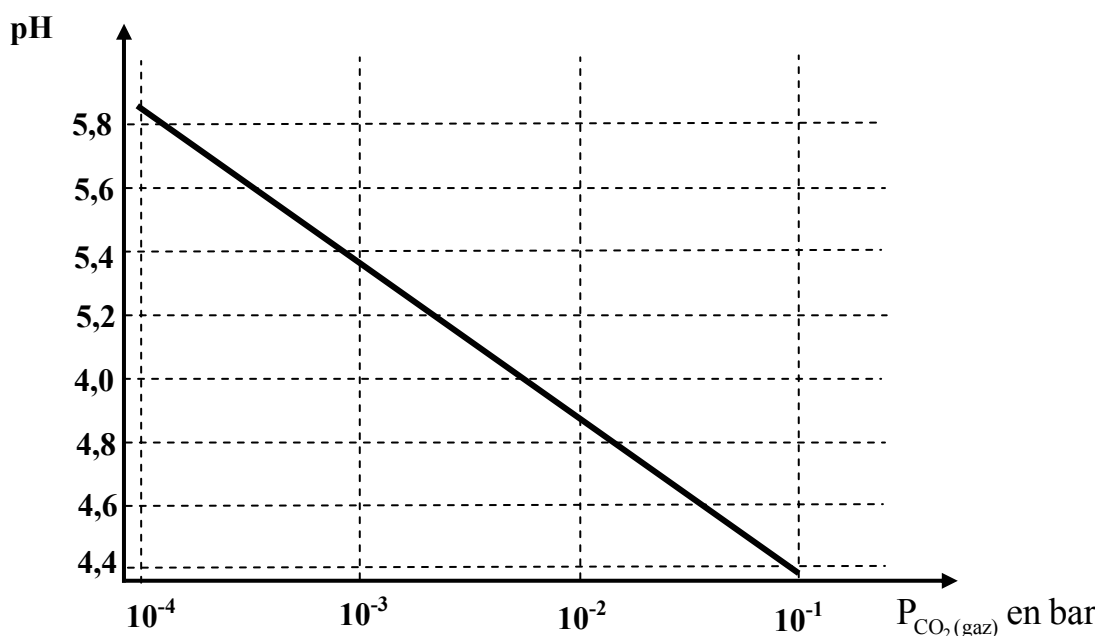


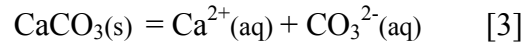
figure 9

On peut remarquer que suivant l'axe horizontal, on a utilisé une échelle logarithmique.

- 1.3.1. En expliquant la méthode utilisée, retrouver graphiquement la valeur du pH à l'équilibre pour une pression partielle en $\text{CO}_2(\text{gaz})$ égale à $3 \cdot 10^{-4}$ bar.
- 1.3.2. Décrire l'évolution, en fonction de la profondeur, de l'acidité de l'eau qui « percole » dans ce type de sols.

2. Dissolution de la roche calcaire.

Pour modéliser la dissolution de la roche calcaire essentiellement constituée par de la calcite ou carbonate de magnésium $\text{CaCO}_3(\text{s})$, il convient d'ajouter aux trois réactions chimiques précédentes une dernière [3] associée à la dissolution de la calcite :



Les réactions chimiques [0], [1], [2] et [3] forment un « système couplé » complexe qui permet de rendre compte de manière satisfaisante du processus de dissolution des roches calcaires.

Lorsque le système chimique [3] est à l'équilibre, la solution est dite saturée. La solubilité s du carbonate de calcium est la masse maximale que l'on peut dissoudre par litre d'eau ; elle s'exprime en g.L^{-1} .

La figure 10 représente la solubilité s du carbonate de magnésium en fonction de la pression partielle en $\text{CO}_2(\text{gaz})$: $P_{\text{CO}_2(\text{gaz})}$. Suivant l'axe horizontal, on a utilisé une échelle logarithmique.

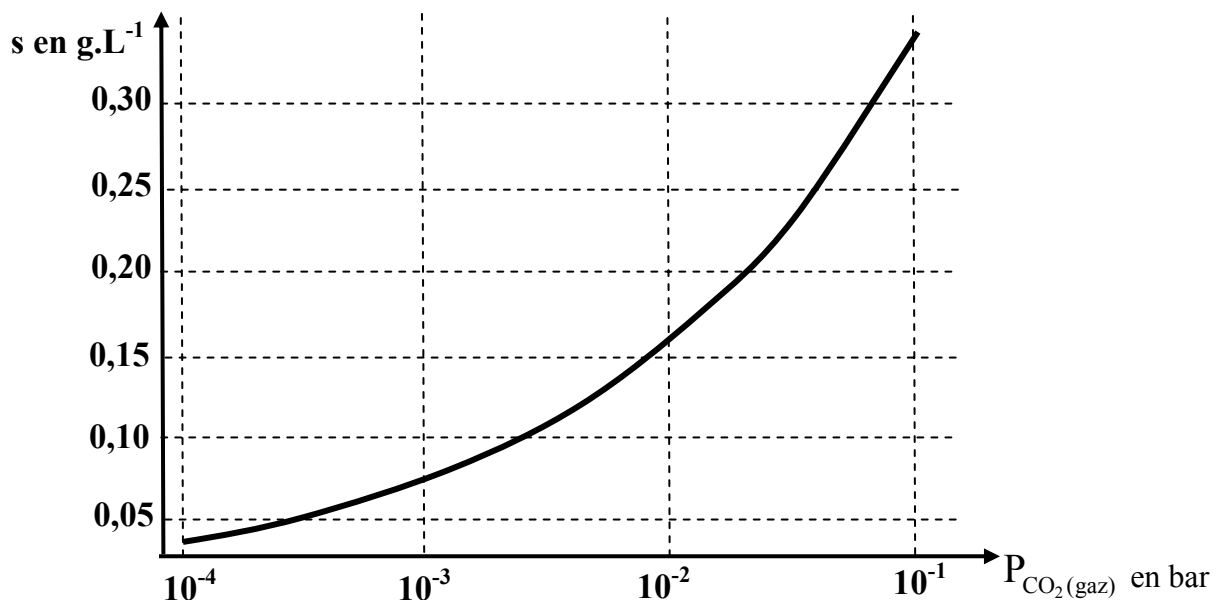


figure 10

2.1. Dissolution de $\text{CaCO}_3(\text{s})$.

- 2.1.1. Décrire l'influence de la pression partielle en $\text{CO}_2(\text{gaz})$ sur la solubilité de la calcite.
- 2.1.2. Décrire qualitativement un processus de dissolution possible des roches calcaires. On s'aidera des résultats des questions précédentes.

2.2. Formations de concrétions.

On observe fréquemment dans les cavités et grottes des régions calcaires des concrétions de formes diverses : comme les stalactites et les stalagmites. La figure 11 montre une photo de telles concrétions dans une grotte du massif du Jura.

Les eaux de ruissellement, saturées en carbonate de calcium et très riches en $\text{CO}_2(\text{aq})$ après un trajet « sous pression » dans les fractures du massif calcaire, s'écoulent en goutte à goutte de la voûte d'une cavité et restituent alors au milieu une partie du carbonate de calcium dissous.

A l'aide de la figure 10, proposer une explication à la formation de telles concrétions.



figure 11 : Concrétions (Grottes d'Osselle dans le Doubs)

2.3. Evaluation de la durée de formation d'une cavité dans un massif calcaire.

On désire, dans cette partie, faire une évaluation de la durée typique nécessaire au développement d'une cavité dans une région calcaire.

On suppose pour cela que dans la région étudiée, le Jura par exemple, la solubilité en $\text{CaCO}_3(\text{s})$ est de l'ordre de 200 mg.L^{-1} , que la pluviosité annuelle est de l'ordre de 1200 mm par an et qu'en raison de l'évaporation et de la transpiration des végétaux seulement 70% des précipitations participent à l'écoulement des eaux.

- 2.3.1.** Evaluer pour 1 m^2 de surface au sol la masse maximale de $\text{CaCO}_3(\text{s})$ que l'on peut dissoudre en une année.
- 2.3.2.** Connaissant la masse volumique ρ_c de la calcite : $\rho_c = 2600 \text{ kg.m}^{-3}$, calculer le volume de $\text{CaCO}_3(\text{s})$ dissous par an toujours pour 1 m^2 de surface au sol.
- 2.3.3.** En déduire l'épaisseur de roche qui disparaît en une année. Cette grandeur est appelée « ablation » par les géologues, elle s'exprime en mm/an .
- 2.3.4.** Evaluer enfin la durée nécessaire à la formation de cavités de l'ordre du mètre en ne prenant en compte que ce processus.
- 2.3.5.** Que pensez-vous de cette durée à l'échelle des temps géologiques ?

Partie C : Mesures de l'intensité du champ de pesanteur terrestre

Dans cette partie, on se propose d'étudier deux gravimètres, appareils destinés à l'étude de l'intensité g du champ de pesanteur terrestre. Un gravimètre est qualifié « d'absolu » s'il permet de mesurer g , il est qualifié de « relatif » s'il est destiné à la mesure des variations de g .

1. Etude d'un gravimètre supraconducteur.

Au début des années 1970 une nouvelle famille de gravimètres relatifs a été développée : les gravimètres supraconducteurs.

Le principe d'un gravimètre supraconducteur est de réaliser l'équilibre d'une sphère en niobium soumise d'une part à l'action de son poids et d'autre part à l'action d'une force de « lévitation magnétique ». La force de « lévitation magnétique » résulte de l'action du champ magnétique, créé par deux bobines parcourues par un courant permanent, sur les courants qui parcourent la sphère.

La sphère en niobium ainsi que les bobines sont à l'état supraconducteur, c'est-à-dire notamment que leur résistance électrique est nulle. Ceci exige, en particulier, d'opérer dans un bain d'hélium liquide dont la température est de 4,2 K, condition indispensable pour pouvoir observer le phénomène de « lévitation magnétique ».

La figure 12 représente un gravimètre supraconducteur ; on peut noter que la partie cylindrique possède un diamètre de l'ordre de 70 cm et que la sphère en niobium, d'un diamètre voisin de 3 cm, est placée au cœur de cette enceinte.



figure 12 : Gravimètre supraconducteur de l'observatoire gravimétrique de Strasbourg

Le but de cette partie est d'illustrer de manière simple le principe de la mesure de la variation de g . On s'appuie sur la figure 13 qui représente la sphère supraconductrice de masse m , de rayon R et de centre C qui se déplace le long de l'axe vertical ascendant Oz et l'une des bobines qui crée le champ magnétique responsable de la lévitation de la sphère.

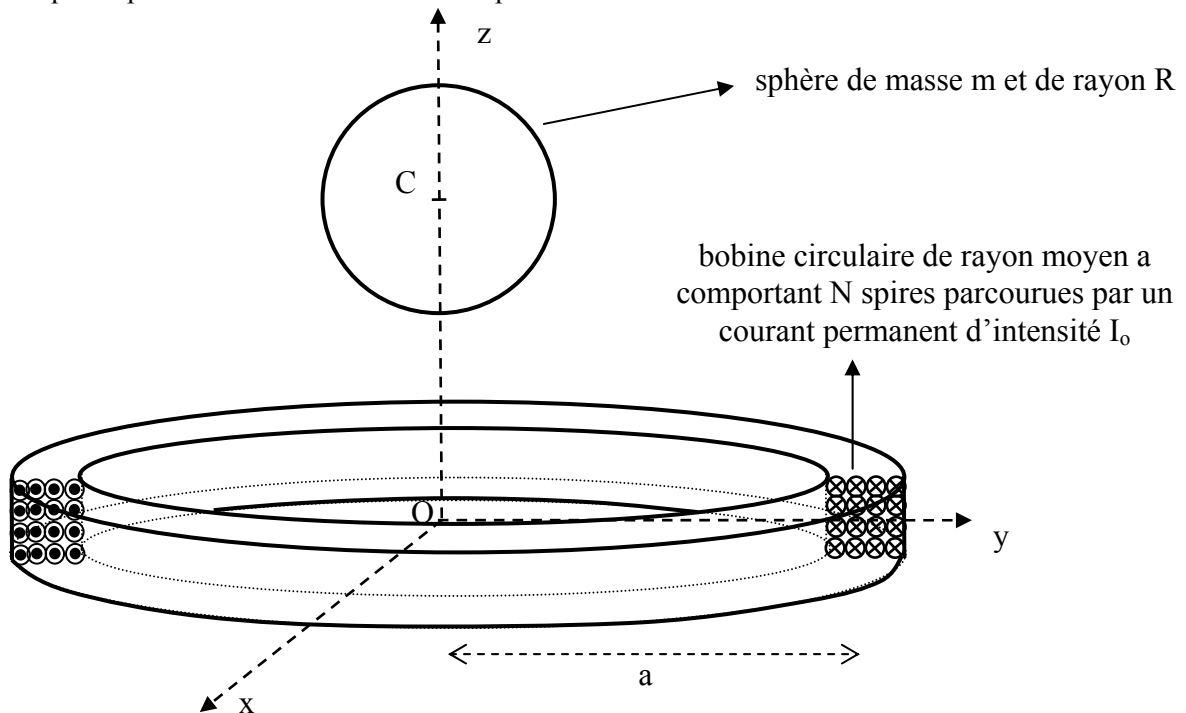


figure 13

Le référentiel d'étude (O, x, y, z) situé à la surface de la Terre sera considéré comme galiléen.

On suppose que la force de lévitation d'origine magnétique subie par la sphère s'écrit

$$\vec{F} = F(z)\vec{e}_z \text{ où } \vec{e}_z \text{ est un vecteur unitaire de l'axe des } z \text{ orienté vers le haut et } F(z) = \alpha \frac{z}{(a^2 + z^2)^4} I_0^2,$$

avec $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-12} \text{ N} \cdot \text{m}^7 \cdot \text{A}^{-2}$; le paramètre a désigne le rayon moyen de la bobine circulaire et I_0 l'intensité du courant qui circule dans les spires. On note g l'intensité du champ de pesanteur.

On limite l'étude à la demi-droite $z \geq 0$.

1.1. Existence d'un équilibre.

1.1.1. Justifier la dimension de la constante α .

1.1.2. Représenter sur un schéma les deux forces qui s'exercent sur la sphère et écrire la condition de l'équilibre de celle-ci.

1.1.3. On admet que le maximum de la fonction $F(z)$ est obtenu pour $z = \frac{a}{\sqrt{7}}$. En déduire l'expression littérale de la valeur minimale I_{\min} du courant I_0 pour que la lévitation magnétique soit possible. On exprimera I_{\min} en fonction de m , g , a et α .

1.1.4. Evaluer numériquement I_{\min} pour $a = 5,0 \text{ cm}$; $m = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1.2. Stabilité des positions d'équilibre.

On choisit un courant $I_0 = 14 \text{ A}$. La figure 14 représente la fonction $F(z)$ en fonction de z pour z variant de 0 à 10 cm.

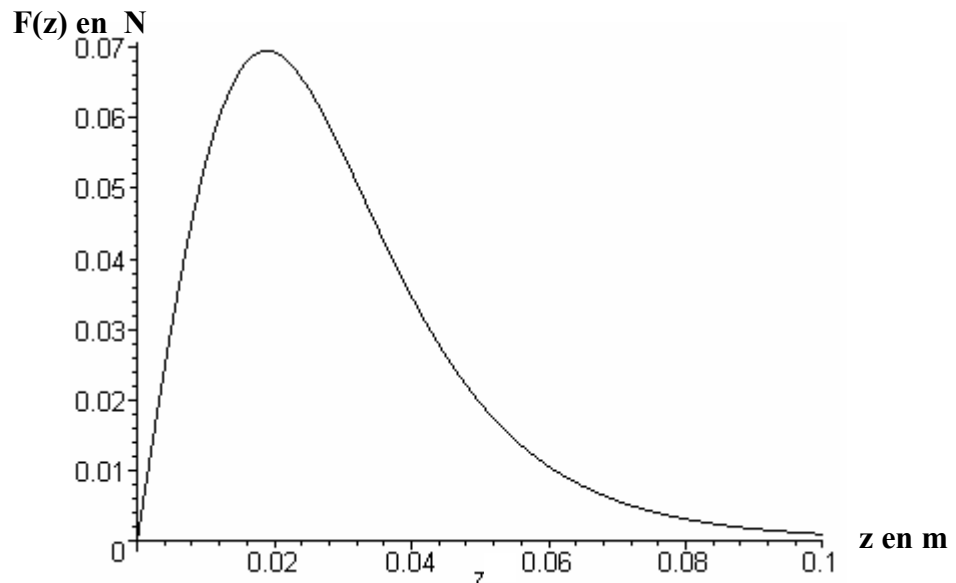


figure 14

- 1.2.1. Commenter qualitativement l'allure de cette courbe et vérifier sa compatibilité avec les données antérieures.
- 1.2.2. En s'appuyant sur la figure 14 que l'on pourra reproduire sommairement sur la copie, montrer graphiquement qu'il existe alors deux positions d'équilibre. On a toujours $a = 5,0 \text{ cm}$, $m = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. On notera z_1 et z_2 avec $z_1 < z_2$ les deux valeurs de z associées.
- 1.2.3. Donner un ordre de grandeur des valeurs de z_1 et z_2 .
- 1.2.4. En conduisant un raisonnement qualitatif précis, étudier la stabilité de ces deux positions d'équilibre possibles. On pourra, par exemple, analyser l'effet d'une petite variation de position. Conclure.

1.3. Etude de la sensibilité du gravimètre.

Ce gravimètre est destiné à mesurer de petites variations δg de l'intensité du champ de pesanteur g . Le déplacement de la sphère est mesuré par un pont de condensateurs, qui permet d'être sensible à une variation δz de la position de la sphère de l'ordre de 10^{-11} m !

Le principe de la mesure des variations de g consiste à opérer à altitude z_0 fixée en faisant varier le courant I_0 . Ainsi lorsque g varie de δg , on fait varier le courant I_0 d'une petite valeur δI_0 de manière à ne pas changer la position d'équilibre stable repérée par z_0 .

- 1.3.1. Commenter qualitativement et de manière pertinente la valeur numérique de δz , la plus petite variation détectable de la position de la sphère.
- 1.3.2. Pour une position d'équilibre stable z_0 donnée, écrire la condition de l'équilibre de la question 1.1.2. de la partie C, d'une part lorsque l'intensité de la pesanteur

vaut g et l'intensité du courant vaut I_0 et d'autre part lorsque l'intensité de la pesanteur vaut $g + \delta g$ et l'intensité du courant vaut $I_0 + \delta I_0$.

1.3.3. Dédire des deux relations précédentes une équation reliant les quatre quantités g , $g + \delta g$, I_0 et $I_0 + \delta I_0$.

1.3.4. En déduire l'expression de $\frac{\delta g}{g}$ en fonction de $\frac{\delta I_0}{I_0}$.

1.3.5. On souhaite pouvoir détecter une variation relative de g : $\frac{\delta g}{g} = 10^{-9}$.

Déterminer la valeur de δI_0 à imposer et commenter cette valeur numérique. On supposera encore $I_0 = 14 \text{ A}$.

2. Etude d'un gravimètre absolu à chute.

On se propose dans cette partie d'étudier un gravimètre « balistique » qui permet de faire chuter pendant environ 200 ms et sur une distance de 0,20 m un objet possédant la forme d'un coin de cube dans une chambre à chutes où règne un vide poussé.

La photographie de la figure 15 donne un aperçu du gravimètre à chute étudié.



figure 15 : Gravimètre à chute type FG-5 de l'observatoire gravimétrique de Strasbourg

Le schéma de la figure 16 propose un schéma fonctionnel simplifié de ce gravimètre.

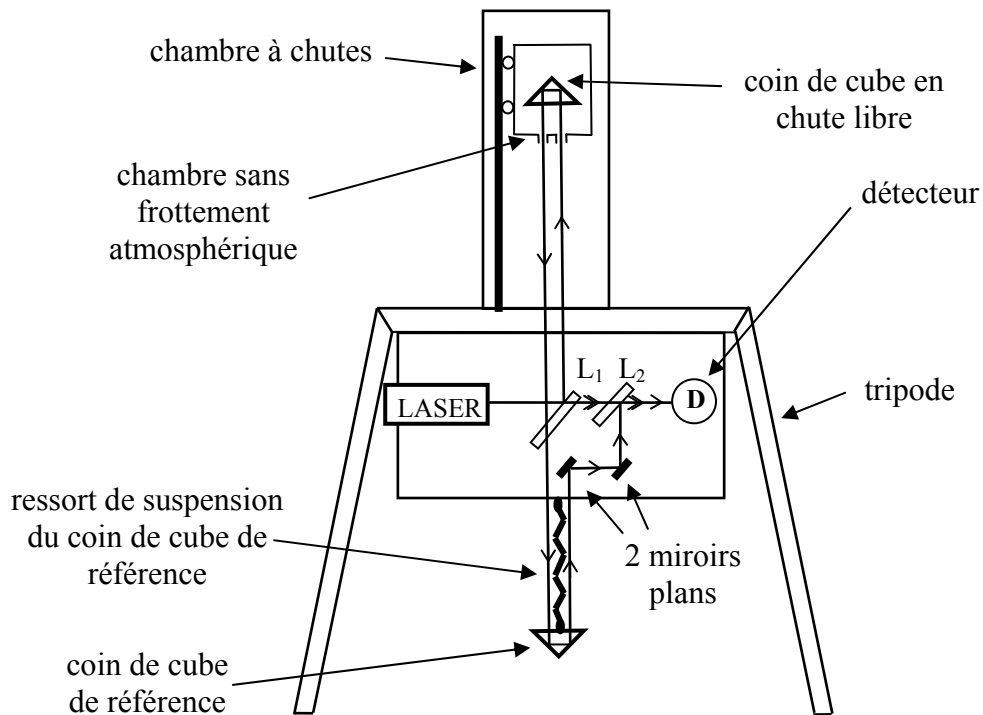


figure 16

L'objet en chute libre est un coin de cube dont la particularité est de réfléchir les rayons lumineux dans la même direction que le rayon incident. Il est placé dans une enceinte appelée « chambre sans frottement atmosphérique » dont le rôle est de placer le coin de cube en position haute et de le stopper délicatement à l'issue de son mouvement de chute libre. Cette chambre est pilotée par un dispositif électronique. L'ensemble coin de cube et « chambre sans frottement atmosphérique » est placé dans une chambre à chutes où règne un vide poussé (pression de 10^{-4} Pa).

Un faisceau laser est émis, il est divisé en deux au niveau de la lame L_1 (appelée lame semi-réfléchissante). Le faisceau horizontal va directement au détecteur de lumière D. L'autre faisceau est dirigé vers le coin de cube en chute libre puis redescend vers un coin de cube de référence et est redirigé vers le détecteur de lumière D grâce à deux miroirs et la lame L_2 . Le coin de cube de référence est suspendu au bâti du dispositif par un ressort de très faible raideur.

Le détecteur de lumière D délivre un signal électrique qui varie dans le temps au cours de la chute. L'étude de ce signal permet d'effectuer des mesures précises de la position du coin de cube. Une horloge atomique à rubidium fournit des mesures précises du temps. La fréquence délivrée par l'horloge vaut : 10000000,002 Hz. La longueur d'onde du laser est connue également avec une grande précision : par exemple l'une des valeurs utilisées vaut 632,99117754 nm.

A partir des couples « position ; temps » caractérisant la loi horaire du mouvement du coin de cube, il est possible de déterminer l'accélération du mouvement et par là même l'intensité du champ de pesanteur.

Bien que le principe de la mesure soit simple, la conception de ces appareils est très délicate car elle relève du domaine de la métrologie de très haute précision.

2.1. Questions relatives au dispositif expérimental.

2.1.1. Pourquoi fait-on le vide dans la chambre où se déroule la chute libre ?

- 2.1.2. Comparer la pression de 10^{-4} Pa à une valeur courante, commenter.
- 2.1.3. Quel avantage, autre que ceux signalés dans le descriptif du système, présente l'utilisation d'une « chambre sans frottement atmosphérique » entourant l'objet en chute libre ?
- 2.1.4. Quel est l'utilité du coin de cube de référence suspendu au bâti du dispositif par un ressort ?

2.2. Approximation d'un champ de pesanteur uniforme.

On suppose dans cette question que l'accélération du champ de pesanteur est uniforme. Son intensité sera notée g_0 . On suppose que le mouvement du coin de prisme de masse m se réduit à un mouvement de translation selon la **verticale Oz orientée vers le bas**.

A l'instant initial, la position est notée z_0 et la vitesse v_0 .

- 2.2.1. Etablir l'équation horaire du mouvement donnant z en fonction de t .
- 2.2.2. Chaque fois que le coin de cube parcourt une distance $d = 3,165 \cdot 10^{-4}$ m, l'horloge atomique donne la date. Chaque chute est ainsi échantillonnée en 600 couples de mesure « position ; temps ». En prenant $g_0 = 9,809 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, et en supposant z_0 et v_0 nulles, estimer la hauteur et la durée de la chute libre.
- 2.2.3. En réalité, les valeurs de z_0 et v_0 ne sont pas connues exactement, la détermination de g_0 requiert au moins trois points de mesure. On note z_1 la position du coin de prisme à la date t_1 , z_2 celle à la date t_2 et z_3 celle à la date t_3 . Montrer que l'on peut déterminer g_0 par la relation :

$$g_0 = 2 \frac{(z_3 - z_1)(t_2 - t_1) - (z_2 - z_1)(t_3 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

L'exploitation statistique de nombreuses séquences de chutes libres permet alors de déterminer une valeur de g_0 et d'estimer l'erreur commise sur la détermination. Un exemple de mesure de g_0 effectuée en janvier 2004 à Strasbourg donne après corrections :

$$g_0 = 980877798,2 \pm 4,4 \text{ }\mu\text{Gal.}$$

2.3. Prise en compte du « gradient de pesanteur ».

La valeur « brute » de l'intensité du champ de pesanteur obtenue après exploitation des couples « position ; temps » doit être corrigée de nombreux effets : influence des astres, valeur finie de la vitesse de propagation de la lumière, pression barométrique, mouvement des pôles, existence d'un « gradient de pesanteur »...

On se propose d'étudier ce dernier effet en supposant comme cela a été vu à la question 2.2.1. de la partie **A** que l'intensité $g(z)$ du champ de pesanteur n'est pas uniforme et varie localement selon la loi : $g(z) = g_0 + \gamma(z - z_0)$. **La verticale Oz est orientée vers le bas**. On prendra $\gamma = 289,0 \text{ }\mu\text{Gal}\cdot\text{m}^{-1}$; g_0 représente maintenant la valeur de $g(z)$ au sommet z_0 de la trajectoire.

- 2.3.1. Justifier qualitativement le signe de γ .
- 2.3.2. On choisit une hauteur h de chute égale à 19 cm ; déterminer la variation de $g(z)$ entre le sommet et la base de la trajectoire.

- 2.3.3.** Justifier précisément la nécessité de prendre en compte cet effet.
- 2.3.4.** Ecrire l'équation différentielle décrivant le mouvement de translation du coin de cube.
- 2.3.5.** A l'instant initial, la position est notée z_0 et la vitesse v_0 . On peut effectuer une approche « perturbative » de l'équation différentielle précédente. On remplace, dans le « second membre » uniquement, z par l'expression $z(t)$ trouvée à la question **2.2.1.** de la partie **C**. Montrer alors que la solution de la nouvelle équation obtenue s'écrit :

$$z(t) = z_0 + v_0 f_1(t) + \frac{g_0}{2} f_2(t)$$

où $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont des fonctions du temps à expliciter.

L'exploitation de cette équation permet d'évaluer la correction à apporter à la valeur « brute » obtenue pour l'intensité du champ de pesanteur. Usuellement cette correction est de l'ordre de $-25 \mu\text{Gal}$.

Partie D : La forme de la Terre

Dès le 18^{ième} siècle, on avait établi expérimentalement que la Terre était aplatie aux pôles. On étudie dans cette partie un modèle qui justifie ce fait expérimental.

1. Illustration qualitative du problème.

On verse de l'eau dans un récipient cylindrique dont on maintient l'axe vertical.

- 1.1.** On suppose que l'ensemble est au repos, décrire la forme de la surface libre.
- 1.2.** On fait tourner à vitesse angulaire constante le récipient autour de son axe vertical ; décrire, en vous appuyant sur un schéma simple, la nouvelle forme adoptée par cette surface libre au bout de quelques instants.

On constate ainsi que la mise en rotation d'un fluide est susceptible de modifier la forme de sa surface libre.

2. La forme du globe terrestre.

On se propose dans cette question d'expliquer le fait que la rotation de la Terre sur elle-même a une influence sur sa forme en la renflant à l'équateur.

Le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique supposé galiléen. On choisit pour repère (T, x, y, z) .

La Terre de masse M_T et de centre T est supposée bien modélisée par un « fluide » à répartition uniforme de masse et à symétrie de révolution autour de l'axe des pôles Tz . Ce « fluide », qui modélise la Terre, tourne donc en bloc autour de l'axe fixe Tz à la vitesse angulaire $\omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.

2.1. Etude cinématique.

Pour simplifier, on considère un point P intérieur à la terre situé à l'instant t dans le plan (Tyz) ; y et z représentent ainsi ses coordonnées dans ce plan. On pose $\vec{u} = \frac{\vec{TP}}{\|\vec{TP}\|}$, $r = \|\vec{TP}\|$ et on désigne par $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base orthonormée associée au repère (T, x, y, z). On pourra se référer à la figure 17.

Ce point P décrit une trajectoire circulaire et est animé d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω .

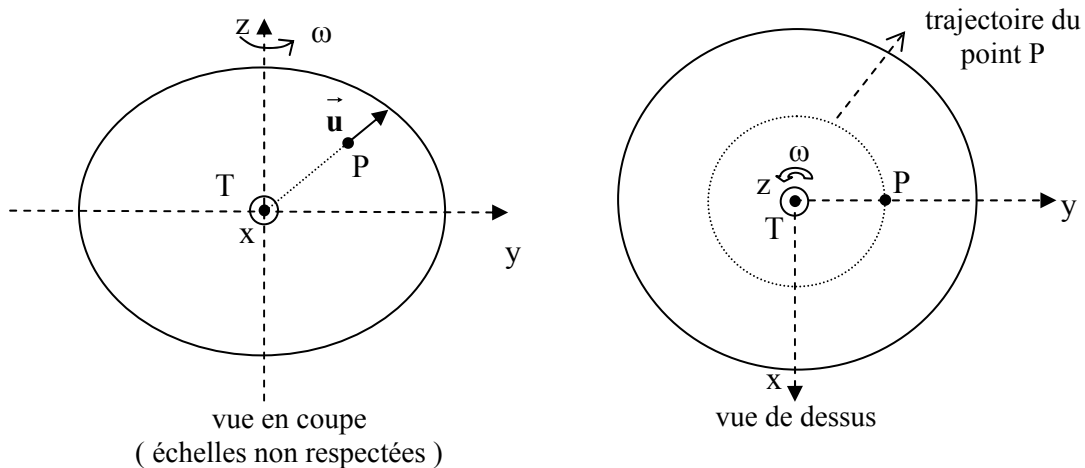


schéma à l'instant t

figure 17

- 2.1.1. Exprimer, à l'instant t, le vecteur vitesse \vec{V} du point P par rapport au référentiel géocentrique.
- 2.1.2. Exprimer, à l'instant t, son vecteur accélération \vec{a} par rapport au référentiel géocentrique.

2.2. Forces de pression interne.

On isole par la pensée un petit élément de volume de masse m situé au voisinage du point P ; cet élément de volume est soumis à l'action de la force de gravitation \vec{F}_G et à la résultante des forces de pression que l'on note \vec{F}_P .

- 2.2.1. Exprimer \vec{F}_G en fonction de m, G, M_T , R_T , r et \vec{u} . On supposera pour cela que la force de gravitation est celle que subirait un point matériel de masse m situé à la surface d'une sphère homogène de rayon r et de même masse volumique moyenne que celle de la terre.
- 2.2.2. Exprimer \vec{F}_P en fonction de m, G, M_T , R_T , et ω ; des variables r et y et des vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{e}_y .
- 2.2.3. En déduire les composantes F_{Py} et F_{Pz} du vecteur \vec{F}_P suivant les axes y et z, à l'aide cette fois des coordonnées y et z du point P.

2.3. La forme de la terre.

On admet que la surface stable du « fluide Terre » est en tout point perpendiculaire à la résultante des forces de pression \vec{F}_P calculée pour un point P situé à la limite de cette surface.

L'équation d'une ellipse (aucune connaissance relative à cette famille de courbes n'est nécessaire à la résolution de la suite du problème) est en coordonnées cartésiennes : $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; a représente la longueur du demi-grand axe et c celle du demi-petit axe. La figure 18 précise ces définitions.

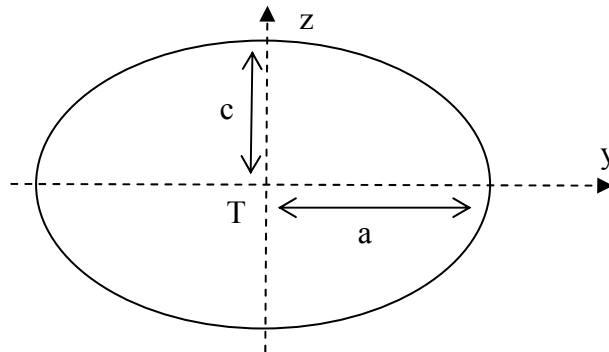


figure 18

On admet que dans le plan (Tyz), le vecteur de composantes $(\frac{y}{a^2}, \frac{z}{c^2})$ est perpendiculaire à l'ellipse définie ci-dessus au point de coordonnées (y,z). Enfin, on montre que l'équation de la trace de la surface de libre du « fluide Terre » dans le plan (Tyz), est celle de l'ellipse définie ci-dessus.

2.3.1. Exprimer le rapport $\frac{a^2}{c^2}$ en fonction de G, M_T, R_T et ω .

2.3.2. Evaluer le rapport $\varepsilon = \frac{\omega^2 R_T^3}{2GM_T}$ et préciser sa dimension.

2.3.3. Donner une expression approchée du coefficient $f = \frac{a-c}{c}$ en fonction de ε ; déterminer f numériquement et comparer la valeur obtenue à celle actuellement admise et qui est de l'ordre de $\frac{1}{298,25}$.

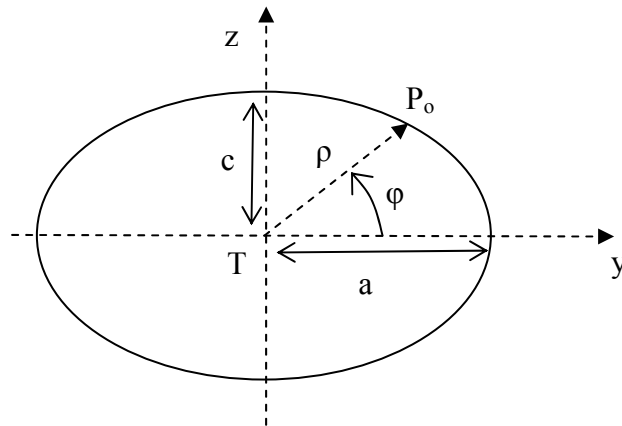
2.4. Amélioration du modèle.

Un étude plus fine prenant en compte la dépendance de la force de gravitation avec la latitude φ du point permet d'établir que l'équation de la surface libre du « fluide Terre » s'écrit :

$$\frac{a}{\rho} + \varepsilon_1 \frac{a^3}{\rho^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \varepsilon_2 \frac{\rho^2}{a^2} \cos^2 \varphi = C^{ste}$$

- ε_1 est un coefficient sans dimension qui rend compte de l'écart à la sphéricité ; $\varepsilon_1 = 5,4 \cdot 10^{-4}$.
- $\varepsilon_2 = \frac{\omega^2 a^3}{2GM_T}$ où a représente le rayon équatorial ; $a = 6378$ km.
- C^{ste} est une constante.

- ρ désigne la distance d'un point P_0 de la surface au centre T de la Terre et φ sa latitude comme l'indique la figure 19.



(échelles non respectées)

figure 19

- 2.4.1. Expliciter la constante C^{ste} en fonction de ε_1 et ε_2 .
- 2.4.2. On pose $\rho = a(1 + \eta)$ où η est une grandeur petite devant 1. Donner une expression approchée de η sous la forme : $\eta \approx -h(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \sin^2 \varphi$; expliciter la fonction $h(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en fonction de ε_1 et ε_2 .
- 2.4.3. Effectuer une nouvelle évaluation numérique du rapport $f = \frac{a - c}{c}$ et conclure.

L'utilisation de satellites permet d'affiner nos connaissances de la forme de notre Terre. La surface moyenne des océans définit le **géοίde**. Notons que sur les continents le **géοίde** ne correspond pas à la surface topographique mais à une surface extrapolée.

La figure 20 est une représentation du géοίde, les couleurs utilisées permettent de connaître l'altitude par rapport à l'**ellipsoıde de référence**. On peut noter par exemple « le creux » de l'Inde (tache bleu foncée) qui se trouve à 100 mètres sous l'ellipsoıde !

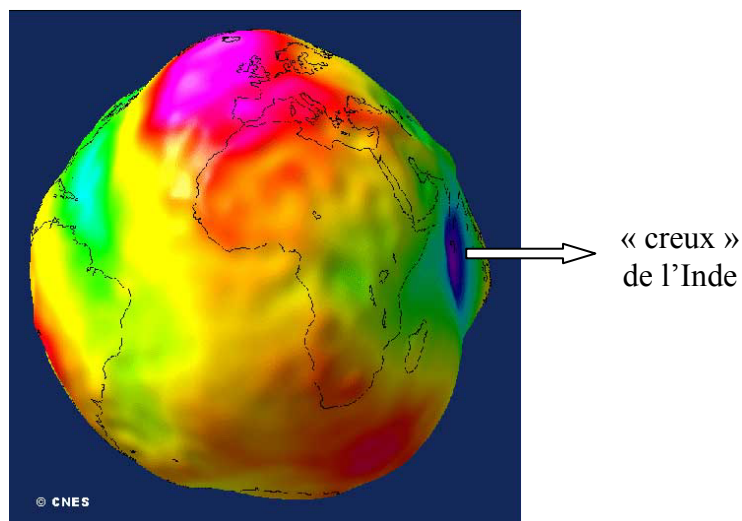


figure 20 : le géοίde.