Les calculatrices sont interdites.

NB. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet comporte deux problèmes qui pourront être traités séparément.
Le candidat est invité à remarquer que ces deux problèmes sont de longueur inégale, le second problème étant deux fois plus long que le premier.

Problème n° 1 : Etude du mouvement d'une barre

Dans ce problème, les vecteurs sont notés en caractères ***gras***

1ère partie : Champ magnétique créé par un circuit triangulaire

Le but de cette partie est de calculer le champ magnétique au centre d'un triangle équilatéral parcouru par un courant I. Les fils d'alimentation du courant I ne sont pas représentés et leur influence est négligée.

1. Soit un segment de fil rectiligne conducteur de longueur finie OA suivant $\mathbf{e_y}$, parcouru par un courant I dont le sens est représenté figure 1.

a) Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème d'Ampère au segment OA ?

b) En utilisant la loi de Biot et Savart, calculer le champ magnétique **B** en un point P (x_0, y_0, 0) créé par ce fil. On donnera le résultat sous sa forme la plus simple, fonction d'un vecteur unitaire, de I, sin α, sin β, x_0 et μ_0 où μ_0 est la perméabilité du vide, α et β les angles représentés sur la figure 1.

2. Déduire de l'expression précédente le champ magnétique $\mathbf{B_{inf}}$ (x_0, y_0, 0) créé par un fil de longueur infinie en fonction de μ_0, I, x_0 et d'un vecteur unitaire.

3. Dans le cas d'un fil de longueur infinie, retrouver le résultat de la question 2 en utilisant des considérations de symétrie, puis en appliquant le théorème d'Ampère à un contour judicieusement choisi.

4. Déduire de la question 1. le champ magnétique $\mathbf{B_0}$ créé au centre C d'un triangle équilatéral de côté AB, parcouru par un courant I dont le sens est représenté figure 2. On donnera le résultat en fonction de μ_0, I, AB et d'un vecteur unitaire.

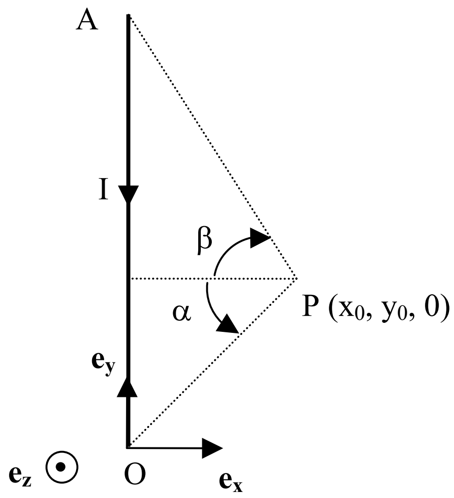

Figure 1

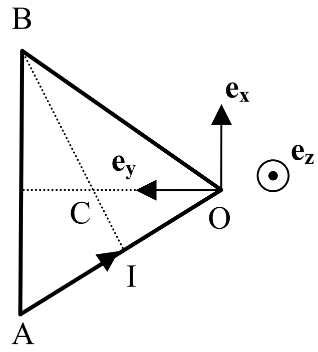

Figure 2

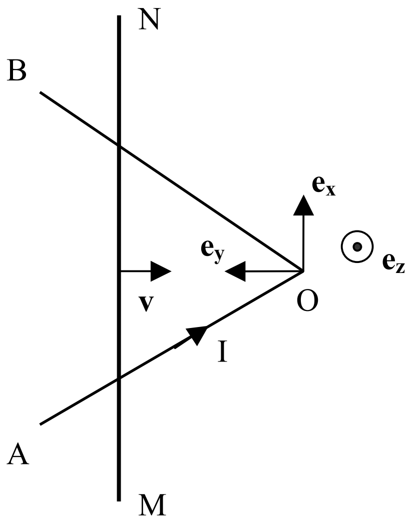

Figure 3

2ème partie : Phénomènes d'induction

Deux rails OA et OB, filiformes, fixes, de longueur commune l = OA = OB, sont placés dans le plan horizontal (xOy) de la figure 3 selon un angle de 60°. L'ensemble AOB formé par les 2 rails est supposé conducteur.
Une barre filiforme MN, de masse m, se déplace sans frottement sur les rails d'un mouvement de translation parallèle à $\mathbf{e_y}$, à la vitesse constante $\mathbf{v} = -V_0\,\mathbf{e_y}$, imposée par l'opérateur. La position de son centre d'inertie est notée G (0, y, 0).
Les 2 rails et la barre ont la même résistivité linéique λ.
L'ensemble du dispositif est plongé dans un champ magnétique extérieur $\mathbf{B_0} = B_0\,\mathbf{e_z}$ avec $B_0>0$. On négligera l'influence du champ magnétique créé par le circuit lui-même.

5. On considère le déplacement de la barre MN entre AB et O.

a) Déterminer la résistance du circuit en fonction de λ et y.

b) Déterminer le flux de $\mathbf{B_0}$ à travers le circuit en fonction de B_0 et y.

c) En déduire la force électromotrice induite dans le circuit en fonction de B_0, V_0, et y.

d) En écrivant l'équation électrique du circuit fermé ainsi formé, en déduire le courant I induit dans le circuit en fonction de B_0, V_0, et λ. I sera compté positivement s'il est dans le sens représenté sur la figure 3.

6.
a) Déterminer la force de Laplace $\mathbf{F_L}$ s'exerçant sur la barre MN en fonction de V_0, B_0, λ, et y.

b) En déduire la force **F** que doit exercer l'opérateur pour maintenir **v** constante.

7. Calculer la puissance de cette force, puis la puissance dissipée par effet Joule. Que peut-on en conclure ?

8. La barre partant de AB, l'opérateur déplace la barre à la vitesse $\mathbf{v} = -V_0\,\mathbf{e_y}$ jusqu'à $y = y_0$, $t = t_0$ puis la laisse ensuite évoluer librement à partir de $t = t_0$. Déterminer l'équation différentielle reliant un temps $t > t_0$ à la position y du centre de la barre en fonction de B_0, λ, m.

Problème n°2 : Thermodynamique
Transformations réversibles et irréversibles

Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

1. Questions de cours

1.1. Donner la définition d'un système fermé.
Pour un système thermodynamique fermé, énoncer le second principe de la thermodynamique. On rappellera notamment le bilan entropique liant la variation d'entropie ΔS du système fermé à l'entropie reçue S^r et la production d'entropie S^p.
Toute équation devra être accompagnée d'une explication.

1.2. Bilans entropiques particuliers

1.2.1. Donner la définition d'un système isolé.
Que devient le bilan entropique du 1.1. dans le cas d'un système isolé ?

1.2.2. Donner la définition d'un système stationnaire.
Que devient le bilan entropique dans le cas d'un système stationnaire ?

1.3. Donner deux exemples de causes d'irréversibilité.

1.4. Dans les questions suivantes, on notera n la quantité de matière de gaz parfait, R la constante des gaz parfaits, C_p la capacité thermique à pression constante des n moles de gaz, C_v la capacité thermique à volume constant des n moles de gaz, et γ le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants. On supposera que C_v et C_p sont indépendants de la température T. On s'attachera à soigner les explications.

1.4.1. Exprimer la variation d'énergie interne d'un gaz parfait en fonction de la variation de la température.

1.4.2. Exprimer la variation d'entropie d'un gaz parfait en fonction des variations de température et de volume.

1.4.3. Dans le cas d'un gaz parfait, donner la relation entre C_p, C_v, R et n. Quel est le nom donné à cette relation ?

1.4.4. Exprimer C_p et C_v en fonction de n, R et γ.

2. Compression d'un gaz parfait

Un cylindre circulaire d'axe vertical et de section S est fermé par un piston de masse M. Pour traiter l'aspect thermodynamique de ce problème, on négligera les frottements du piston sur le cylindre (NB : ces frottements existent néanmoins et permettent d'atteindre l'état d'équilibre mécanique).
On introduit dans le cylindre à température ambiante T une quantité d'azote n telle que le plan inférieur du piston soit, à l'équilibre, à une distance a_1 du fond *(fig.1)*.
On notera P_0 la pression atmosphérique et on assimilera l'azote à un gaz parfait diatomique.

2.1. En étudiant l'équilibre du piston, donner l'expression de la pression P_1 à l'intérieur du cylindre en fonction de P_0, M, S, et l'accélération de la pesanteur g.

On ajoute dorénavant une surcharge de masse m sur le piston *(fig.2)*.

2.2. On suppose dans cette question que le nouvel équilibre mécanique est atteint avant que tout échange de chaleur n'ait eu lieu avec l'extérieur.

2.2.1. Exprimer la pression P_2 dans le cylindre en fonction de P_0, M, m, S et g.

2.2.2. Déterminer le travail des forces de pression atmosphérique exercées sur le piston et transmises intégralement au gaz en fonction de P_0 et de la variation de volume du gaz dans le cylindre.

2.2.3. Déterminer le travail de pesanteur de l'ensemble {piston + surcharge} en fonction de M, m, S et g et de la variation de volume du gaz dans le cylindre.

2.2.4. En appelant T_2 la température juste après l'équilibre mécanique et avant tout échange thermique, appliquer le premier principe de la thermodynamique au système fermé du gaz parfait et exprimer la nouvelle hauteur du piston a_2 en fonction de a_1, C_v, T_2, T, P_2 et S.

2.2.5. En déduire alors a_2 en fonction de a_1, γ, P_1 et P_2.

2.3. On suppose maintenant que l'équilibre thermique s'est établi avec l'extérieur.
Exprimer la pression P_3 à l'intérieur du cylindre en fonction de P_0, M, m, S et g.
Exprimer ensuite la nouvelle position d'équilibre du piston a_3 en fonction de a_1, P_1 et P_3, puis en fonction de a_1, P_0, M, m, S et g.

2.4. Quelle est la relation entre la quantité de chaleur Q et le travail W mis en jeu lors de l'ensemble de la transformation subie par le gaz ?
Donner l'expression du travail W. En déduire l'expression de la quantité de chaleur Q en fonction de P_3, a_3, a_1 et S, puis en fonction de n, R, T, P_0, M, m, S et g, toujours sur l'ensemble de la transformation.

2.5. On souhaite ici calculer les variations d'entropie sur l'ensemble de la transformation.

2.5.1. L'atmosphère extérieure ayant en permanence une température égale à T, quel nom peut-on lui donner ? En déduire l'expression de l'entropie reçue par l'extérieur. Exprimer la variation d'entropie de l'extérieur ΔS_{ext} en fonction de n, R, M, m, g, P_0 et S.

2.5.2. Quelle est l'entropie reçue par le gaz parfait dans le cylindre ? En utilisant la question 1.4.2, exprimer la variation d'entropie totale du gaz parfait dans le cylindre ΔS_{gaz} en fonction de n, R, M, m, g, P_0 et S.

2.5.3. En déduire la variation d'entropie de l'univers $\Delta S = \Delta S_{gaz} + \Delta S_{ext}$.

En posant $x(m) = \dfrac{mg}{Mg + P_0 S}$, montrer que $\Delta S = nR\big(x - ln(1 + x)\big)$.

2.5.4. La transformation est-elle réversible ? Justifier la réponse.

2.6. On veut rendre cette fois-ci la transformation quasi statique, en ajoutant la surcharge de masse m progressivement : on dépose successivement p masses identiques μ très petites, en attendant à chaque fois que les équilibres thermique et mécanique s'établissent avant d'ajouter la petite masse suivante. On passe ainsi par une suite d'états d'équilibre thermodynamique.

Lorsqu'on dépose la $j^{\text{ième}}$ masse μ, j-1 masses μ sont déjà sur le piston. On posera $x_j(\mu) = \dfrac{\mu g}{(M + (j-1)\mu)g + P_0 S}$, et on notera que si p est grand, $x_j(\mu) \ll 1$.

2.6.1. Exprimer la variation d'entropie de l'univers ΔS_j correspondant à l'ajout de la $j^{\text{ième}}$ petite masse μ, alors que j-1 masses sont déjà posées. Faire un développement limité au second ordre de ΔS_j sur la variable $x_j(\mu)$.

2.6.2. Exprimer sous la forme d'une somme la variation d'entropie de l'univers correspondant à l'ajout de toutes les petites masses.

En remarquant que $x_j(\mu) \leq x(\mu)$, montrer que l'on peut majorer la variation totale d'entropie de l'univers par $\frac{nR}{2} x(m)\, x(\mu)$.

2.6.3. Que devient la variation d'entropie lorsque p tend vers l'infini ? A-t-on rendu la transformation réversible en travaillant de façon quasi statique?

3. Irréversibilité de la détente de Joule-Gay Lussac

3.1. Détente de Joule-Gay Lussac

On considère un récipient ayant des parois rigides et adiabatiques. Il est composé de deux compartiments de volume V_1 et V_2 séparés par une cloison. On introduit n moles de gaz parfait à la température T dans un des deux compartiments. Le deuxième compartiment est vide *(fig.3)*.
Lorsqu'on enlève la cloison séparant les deux compartiments, le gaz se répand dans tout le volume. On supposera que le travail fourni pour enlever la cloison est négligeable.

3.1.1. Quel est le travail reçu par le gaz parfait au cours de la détente ?

3.1.2. Montrer que l'énergie interne du gaz est constante au cours de la détente.

3.1.3. En déduire que la température du gaz ne change pas au cours de la détente.

3.1.4. En utilisant la question 1.4.2., calculer la variation d'entropie du gaz au cours de la détente en fonction de n, R, V_1 et V_2.

3.1.5. Que vaut l'entropie reçue par le gaz S^r ? Que vaut l'entropie produite par le gaz S^p ? La transformation subie par le gaz est-elle réversible ?

3.2. On opère cette fois-ci de façon quasi statique à l'aide d'un récipient comportant $p+1$ compartiments, p étant très grand devant 1. Le premier compartiment contenant initialement le gaz a toujours le même volume V_1. Le reste du récipient de volume V_2 est subdivisé en p petits compartiments de volumes δV séparés par des cloisons *(fig.4)*.
On souhaite procéder en augmentant le volume occupé par le gaz par petites quantités δV. On enlève pour cela une à une les cloisons séparant les compartiments. On attend à chaque fois le retour à l'équilibre avant d'enlever une nouvelle cloison : le gaz est alors à chaque instant dans un état infiniment proche d'un état d'équilibre thermodynamique.

3.2.1. Exprimer la variation d'entropie ΔS_j correspondant à la suppression de la cloison j en fonction de n, R, δV et le volume v_j occupé par le gaz avant d'enlever la cloison j.

3.2.2. Exprimer la variation d'entropie du gaz correspondant à la suppression de toutes les cloisons en fonction de n, R, V_1 *et* V_2.

3.2.3. Comparer les résultats des questions 3.1.4. et 3.2.2.

En procédant de façon quasi statique, a-t-on rendu la transformation réversible ?

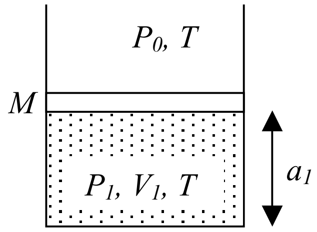

Fig.1 : cylindre et piston dans la configuration initiale

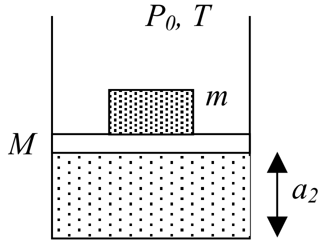

Fig.2 : Ajout de la masse m

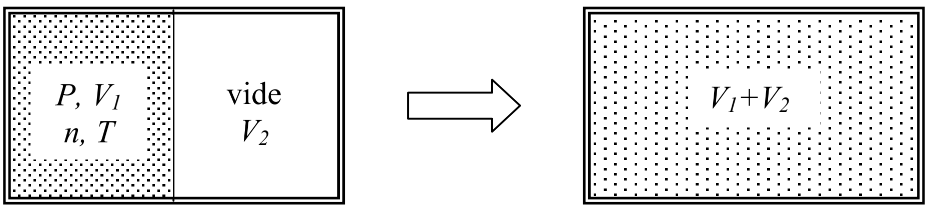

Fig.3 : détente de Joule Gay-Lussac simple

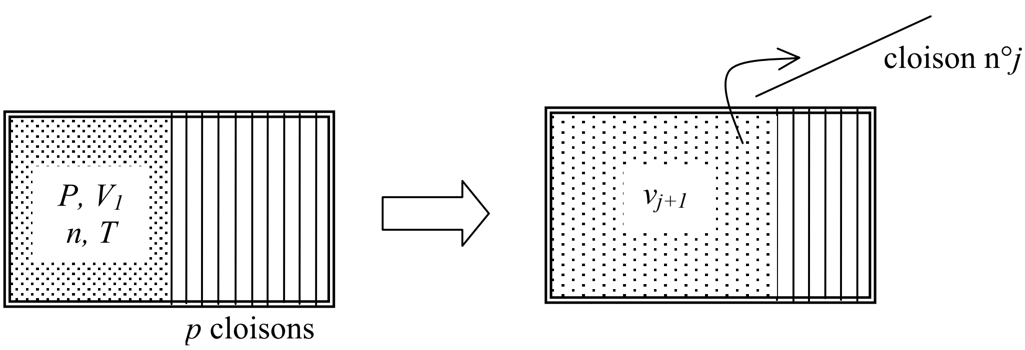

Fig.4 : détente de Joule Gay-Lussac réalisée de façon quasi statique

Fin de l'énoncé