

CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS**(Concours national DEUG)**

Epreuve commune à 2 options (Mathématiques et Physique)

PHYSIQUE - PARTIE II**Mardi 16 mai : 10 h 15 - 12 h 15**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est interdit.

De très nombreuses parties sont indépendantes. Il est conseillé aux candidats de prendre connaissance rapidement de la totalité du texte du sujet.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Électromagnétisme

Protection contre le piratage des cartes bancaires « NFC-RFID »

Il s'agit d'étudier, dans ce sujet, l'intérêt d'une simple feuille d'aluminium dans la protection contre le piratage des données des nouvelles cartes bancaires dotées du dispositif « paiement sans contact » (NFC-RFID). Le but est d'éviter les échanges, par ondes radio, entre la puce de la carte et tout terminal malveillant.

Document 1 (d'après le site Web « Wikipédia ») https://fr.wikipedia.org/wiki/Carte_%C3%A0_puce

Une carte à puce est une carte en matière plastique, voire en carton, de quelques centimètres de côté et moins d'un millimètre d'épaisseur, portant au moins un circuit intégré capable de contenir de l'information. Le circuit intégré (la puce) peut contenir un microprocesseur capable de traiter cette information. Les cartes à puce sont principalement utilisées comme moyens d'identification personnelle (carte « Vitale », carte « SIM », etc.) ou de paiement (carte bancaire, porte-monnaie électronique, etc.). La lecture (l'écriture) des données est réalisée par des équipements spécialisés, certaines puces nécessitant un contact physique (électrique) et d'autres pouvant fonctionner à distance (communication par ondes radio).

La puce de la carte peut être accessible :

- par contact : l'interface entre les contacts de la puce et ceux du lecteur est le circuit imprimé doré très mince bien connu ;
- sans contact : par radiofréquence à courte ou moyenne portée, via une antenne interne dont les spires sont moulées dans l'épaisseur de la carte ;
- avec ou sans contact (cartes mixtes : c'est le cas de la plupart des nouvelles cartes bleues délivrées par les banques).

Les cartes à distance (NFC-RFID) possèdent une antenne et un convertisseur de signal associés à la puce. L'antenne perçoit le signal (alternatif sinusoïdal) émis à distance par le terminal et le convertisseur transforme ce signal, d'une part en un courant continu qui alimente la puce, d'autre part en un courant alternatif appelé « horloge » qui sert à synchroniser les échanges de la puce et du terminal dans le temps.

Document 2 (d'après Renaud LIFCHITZ, Ingénieur Sécurité Informatique)

Sur le site Web d'information <http://www.nextinpact.com>

Les puces RFID (*Radio Frequency Identification*) des cartes permettent de transmettre des informations sur une courte distance, ces dernières circulent en clair sur les ondes et sont parfaitement lisibles avec peu de moyens. On peut, par exemple, accéder à ces informations avec une simple clé USB NFC (*New Field Communication*) ou un téléphone, même si ce n'est pas l'équipement le plus adapté. Il n'y a aucune authentification, aucun chiffrement des données. Avec une antenne passive, on peut capter un signal lors d'un paiement, avec ce type de cartes, jusqu'à 15 mètres. Une simple antenne radio FM peut suffire, même si ce n'est pas idéal. On obtient alors les numéros de cartes complets ainsi que les dates d'expiration.

À quelques mètres, on peut donc solliciter une puce et recueillir les données relativement aisément. Si l'on veut éviter de se faire espionner sauvagement dans la rue, il suffit de ranger sa carte dans un portefeuille possédant un doublage métallique (feuille d'aluminium) pour faire office de « cage de Faraday ».

Document 3

(d'après le site Web de commerce en ligne « PriceMinister », entreprise française)

<http://www.priceminister.com>



L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Un conducteur en aluminium (métal pur) de très grandes dimensions, homogène, isotrope, non magnétique et dont les charges mobiles sont des électrons animés d'une vitesse d'ensemble $\vec{v}(t)$, est soumis à l'action d'un champ électrique uniforme $\vec{E} = E \vec{e}_x$. Ce champ électrique est appliqué à partir de l'instant initial $t = 0$. Les électrons libres, de masse m et de charge $-e$, subissent les actions de la force électrique $\vec{f}_{el} = -e \vec{E}$ et d'une force de frottement (modèle du fluide visqueux) $\vec{f}_f = -\frac{m}{\tau} \vec{v}(t)$, avec τ constante physique. Le poids de ces charges est négligé. Soit N^* (unité : m^{-3}), le nombre supposé constant d'électrons libres par unité de volume.

La loi d'Ohm locale est applicable dans un conducteur électrique lorsque la vitesse \vec{v} de ses porteurs est proportionnelle au champ électrique auquel ils sont soumis et lorsque le vecteur densité de courant de conduction \vec{j} s'écrit $\vec{j} = \rho_{mob} \vec{v} = \sigma \vec{E}$, avec ρ_{mob} et σ , respectivement charge volumique des porteurs mobiles (unité : $C m^{-3}$) et conductivité électrique du milieu (unité : $S m^{-1}$).

L'aluminium métallique présente les caractéristiques suivantes :

- $M(Al) = 2,7 \times 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}$: masse molaire ;
- $\rho(Al) = 2,7 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$: masse volumique ;
- chaque atome d'aluminium libère trois électrons qui participent à la conduction ;
- $\sigma_o = 3,8 \times 10^7 \text{ S m}^{-1}$: conductivité électrique en régime stationnaire ;
- $\mu(Al) \approx \mu_o = 1,2 \times 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$: perméabilité magnétique (proche de celle du vide) ;
- $\varepsilon(Al) \approx \varepsilon_o = 8,8 \times 10^{-12} \text{ USI}$: permittivité diélectrique (proche de celle du vide).

Équations de Maxwell :

- 1^{ère} équation de Maxwell : $\text{div } \vec{B} = \vec{0}$ (ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{0}$) ;
- équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (ou $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) ;
- équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$ (ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$) ;
- équation de Maxwell-Ampère : $\text{rot } \vec{B} = \mu_o \vec{j} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (ou $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \vec{j} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$).

Caractéristiques de l'électron : masse $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg ; charge $q = -e = -1,6 \times 10^{-19}$ C.

Autres données : $c = 3,0 \times 10^8$ m s⁻¹ (célérité de la lumière dans le vide) ;
 $N_A = 6,0 \times 10^{23}$ mol⁻¹ (nombre d'Avogadro).

Les grandeurs complexes sont soulignées d'un trait gras (avec $i^2 = -1$).

I. Loi d'Ohm locale

Le champ électrique appliqué est uniforme et constant $\vec{E} = E_o \vec{e}_x$.

1. Rappeler la signification physique de la force de frottement.
2. Quelle est la dimension ou l'unité de τ ?
3. Le milieu conducteur est immobile dans le référentiel d'étude (quasi galiléen). Établir, à l'aide du principe fondamental de la dynamique (PFD), l'équation différentielle du mouvement qui lie la vitesse $\vec{v}(t)$ des électrons au temps t .
4. En déduire l'expression vectorielle de la vitesse $\vec{v}(t)$, avec $v(t=0) = 0$ m s⁻¹.
5. Au bout d'un certain temps, dit de relaxation (quelques τ), la vitesse limite \vec{v}_{lim} est atteinte et la loi d'Ohm s'applique dans le conducteur.
 - a) Formuler la vitesse limite \vec{v}_{lim} de l'électron en fonction des grandeurs e , τ , m et \vec{E} .
 - b) Exprimer τ en fonction des grandeurs m , σ_o , e et N^* .
6. *Applications numériques* : calculer N^* et τ .

II. Conducteur soumis à un champ électrique sinusoïdal

Le champ électrique constant précédent (partie I) est remplacé par un champ électrique sinusoïdal uniforme de pulsation ω et d'expression $\vec{E} = \vec{E}_o \cos(\omega t) = E_o \cos(\omega t) \vec{e}_x$, auquel est associé le champ complexe $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_o e^{i\omega t}$.

L'équation différentielle du mouvement s'écrit : $\frac{d\underline{\vec{v}}}{dt} + \frac{\underline{\vec{v}}}{\tau} = -\frac{e}{m} \underline{\vec{E}}$ (relation qui n'est pas à démontrer) avec $\underline{\vec{v}}$ expression complexe de la vitesse de l'électron.

7. Rechercher une expression de la vitesse sous la forme $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}}_o e^{i\omega t}$, avec $\underline{\vec{v}}_o$ amplitude vectorielle complexe à exprimer en fonction des données de l'énoncé.
8. En déduire une expression complexe du vecteur densité de courant $\underline{\vec{j}}$ (défini par $\underline{\vec{j}} = \rho_{mob} \underline{\vec{v}}$).
9. Montrer que la conductivité électrique complexe $\underline{\sigma}$ du milieu (définie par $\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma} \underline{\vec{E}}$) peut s'écrire sous la forme $\underline{\sigma} = \frac{\sigma_o}{1+ib}$. Exprimer la constante b en fonction des données de l'énoncé.

10. *Applications numériques* : le temps caractéristique de relaxation est estimé à la valeur $\tau = 1,0 \times 10^{-14}$ s.
- En régime variable, la loi d'Ohm locale reste valable si la conductivité électrique reste assimilable à la conductivité σ_0 du régime stationnaire, c'est-à-dire si, arbitrairement, $b \leq 10^{-2}$. En deçà de quelle valeur limite f_{lim} (avec $f_{lim} = \frac{\omega_{lim}}{2\pi}$) de la fréquence, la loi d'Ohm reste-t-elle encore applicable ?
 - La fréquence du champ électrique \vec{E} vaut $f = 14$ MHz (fréquence de l'onde mise en jeu lors des communications, à distance, de la puce de la carte bancaire). Comparer numériquement le vecteur densité de courant de conduction \vec{j} au vecteur densité de courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère. En déduire, pour cette équation, une simplification caractéristique de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).
11. Il s'agit, maintenant, de vérifier la neutralité de l'aluminium, dans le cas où $f \leq f_{lim}$. Le conducteur peut présenter localement, en un point M , un excédent de charge électrique de densité volumique de charge $\rho(M)$.
- À l'aide de la loi d'Ohm locale, de l'équation de Maxwell-Gauss et de l'équation de conservation de la charge : $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (équation qui n'est pas à démontrer), établir une équation aux dérivées partielles qui relie la charge volumique ρ au temps t .
 - En admettant que $\rho(M)$ ne dépend que du temps t , établir l'expression de cette fonction $\rho(t)$.
 - S'il apparaît, en un endroit du conducteur, un excédent de charge, montrer que celui-ci disparaît en un temps caractéristique τ' , qui sera exprimé en fonction des données de l'énoncé.
 - Application numérique* : calculer τ' .
 - Comparer les temps τ' et $\tau = 1,0 \times 10^{-14}$ s. Est-il réaliste de poser $\rho(M) \approx 0$ C m⁻³ en tout point M du solide conducteur ?

III. Propagation d'une onde électromagnétique

Les deux champs précédents (parties I et II) sont supprimés. Une onde électromagnétique plane, progressive et harmonique de pulsation ω , est transmise dans le conducteur et s'y propage parallèlement à l'axe Oz suivant les z croissants. Le champ électrique $\vec{E}_t(z,t)$ de l'onde transmise s'écrit, en notation complexe $\vec{E}_t(z,t) = E_{t0} e^{i(\omega t - \underline{k}z)} \vec{e}_x$, avec E_{t0} constante positive et $\underline{k} = \underline{k} \vec{e}_z = (k_1 + i k_2) \vec{e}_z$, vecteur d'onde complexe pour lequel k_1 et k_2 sont réels (figure 1).

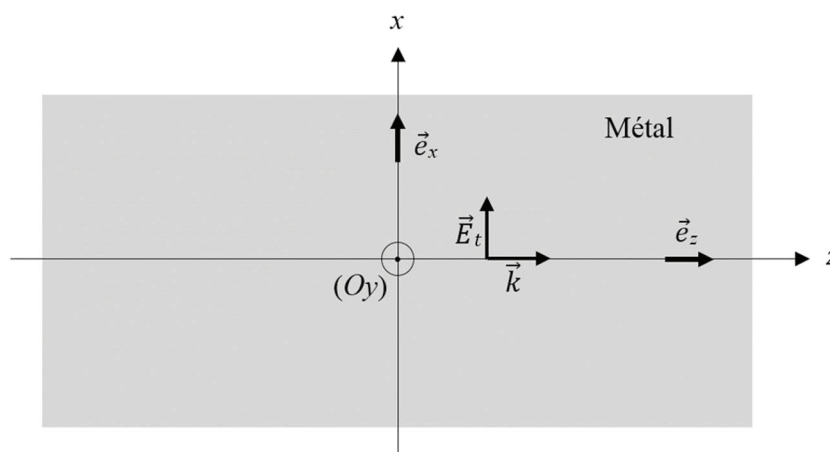


Figure 1
5/8

Rappels : $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$

$$(-i)^2 = -1 ; \quad \sqrt{-i} = \pm \frac{i-1}{\sqrt{2}}$$

12. L'onde électromagnétique est-elle polarisée ? Si oui, de quelle polarisation s'agit-il ?
13. En utilisant la loi d'Ohm locale et les équations de Maxwell appliquées à ce conducteur [courant de déplacement négligeable et charge volumique $\rho(M)$ nulle], établir l'équation de diffusion (ou équation aux dérivées partielles qui relie $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$) satisfaite par le champ \vec{E}_t dans l'aluminium.
14. En reportant, dans l'équation de diffusion précédente (question 13), la forme complexe $\vec{E}_t(z,t)$ du champ électrique de l'onde transmise, montrer que la relation (dite de dispersion) définissant le vecteur d'onde complexe \underline{k} s'écrit : $\underline{k}^2 = -i \omega \mu_0 \sigma_0$.
15. En déduire, sachant que $k_1 > 0$ (propagation selon \vec{e}_z et dans la direction des z croissants), l'expression des composantes k_1 et k_2 en fonction des grandeurs ω , μ_0 et σ_0 .
16. Caractéristiques du champ électrique.
- Montrer que le champ électrique complexe peut s'écrire : $\vec{E}_t(z,t) = E_{t0} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{e}_x$.
 - Exprimer δ en fonction des grandeurs ω , μ_0 et σ_0 .
 - δ est une grandeur caractéristique. Quelle est sa signification physique ?
 - Donner l'expression du champ électrique réel $\vec{E}_t(z,t)$.
 - Tracer l'allure, pour $z \geq 0$ m, de la courbe représentative de l'amplitude du champ E_t en fonction de z .
17. Application numérique : calculer δ pour l'onde radio de fréquence $f = 14$ MHz.
18. Rappeler, sans démonstration, l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_t$ transmis en fonction des grandeurs μ_0 , \vec{E}_t et \vec{B}_t (champ magnétique associé).
19. Application numérique : dans le conducteur, l'expression vectorielle de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_t(z,t)$ s'écrit (formule qui n'est pas à démontrer) :

$$\langle \vec{\Pi}_t(z,t) \rangle = \frac{E_{t0}^2}{2 \mu_0 \omega \delta} e^{-\frac{2z}{\delta}} \vec{e}_z.$$

L'onde traverse le conducteur sur une épaisseur $a = 1,0 \times 10^{-4}$ m (épaisseur d'une feuille d'aluminium de protection électromagnétique). Calculer, avec la valeur $\delta = 2,0 \times 10^{-5}$ m, le coefficient d'atténuation défini par : $A = \frac{\| \langle \vec{\Pi}_t(z=a) \rangle \|}{\| \langle \vec{\Pi}_t(z=0 \text{ m}) \rangle \|}$. Conclure.

IV. Réflexion de l'onde à la surface du conducteur

Une onde plane incidente, progressive, harmonique de pulsation ω , dont le champ électrique complexe associé s'écrit : $\vec{E}_i(z,t) = E_{i0} e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x = \underline{E}_{i0} e^{i\omega t} \vec{e}_x$ (avec k_0 constante positive), se propage dans l'air, assimilé au vide, parallèlement à l'axe Oz suivant les z croissants. L'onde atteint

alors, sous incidence normale, la surface (plan xOy) d'un conducteur métallique (aluminium) occupant le demi-espace infini ($z \geq 0$ m) (figure 2).

Soient :

- $\vec{E}_t(z,t) = E_{to} e^{i(\omega t - k z)} \vec{e}_x = \underline{E}_{to} e^{i\omega t} \vec{e}_x$ (avec $\vec{k} = k \vec{e}_z$ vecteur d'onde complexe étudié à la partie III) le champ complexe transmis dans le conducteur
- $\vec{E}_r(z,t) = E_{ro} e^{i(\omega t + k_0 z)} \vec{e}_x = \underline{E}_{ro} e^{i\omega t} \vec{e}_x$ le champ complexe réfléchi dans l'air au niveau de la surface xOy .

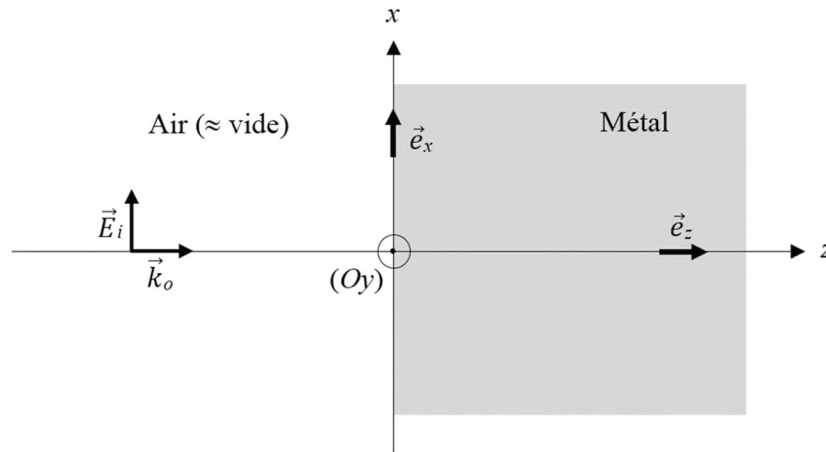


Figure 2

Donnée : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ (relation entre les champs \vec{E} et \vec{B} d'une même onde de vecteur d'onde \vec{k}).

20. Établir l'expression du champ magnétique $\vec{B}_i(z,t)$ associé à l'onde incidente.
21. Soient \underline{t} et \underline{r} , les coefficients complexes de transmission et de réflexion, tous les deux en amplitude, définis respectivement par les relations $\underline{E}_{to} = \underline{t} \underline{E}_{io}$ et $\underline{E}_{ro} = \underline{r} \underline{E}_{io}$ (avec \underline{E}_{io} , \underline{E}_{to} et \underline{E}_{ro} les amplitudes complexes respectives des différents champs). Sachant que la continuité de la composante tangentielle du champ électrique total, de part et d'autre de l'interface $z = 0$ m (plan xOy), s'écrit $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t$ (relation qui n'est pas à démontrer), établir une première relation notée (1) entre \underline{t} et \underline{r} .
22. La continuité du champ magnétique en $z = 0$ m (relation $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t$ qui n'est pas à démontrer) permet d'obtenir une seconde relation, notée (2) : $k_0 \delta (1 - \underline{r}) = (1 - i) \underline{t}$ (relation qui n'est pas à démontrer). La combinaison de (1) et (2) conduit aux expressions complexes de \underline{r} et \underline{t} suivantes :

$$\underline{r} = \frac{1 - \frac{(1-i)}{k_0 \delta}}{1 + \frac{(1-i)}{k_0 \delta}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2}{1 + \frac{(1-i)}{k_0 \delta}} \quad (\text{expressions qui ne sont pas à démontrer}).$$

Soient R et T , les coefficients de réflexion et de transmission en puissance.

- Quelle relation simple, entre les deux coefficients R et T , permet de respecter la conservation de l'énergie, à proximité immédiate de l'interface $z = 0$ m ?
- Les calculs conduisent, pour $f = 14$ MHz et $\delta = 2,0 \times 10^{-5}$ m, à la valeur $T = 1,2 \times 10^{-5}$ (calculs à admettre). Commenter le résultat.

- c) L'hypothèse $\delta \rightarrow 0$ m (cas du conducteur parfait) est envisagée.
- Que devient, dans ce cas, les coefficients complexes de transmission et de réflexion, tous les deux en amplitude (respectivement \underline{t} et \underline{r}) du champ électrique ?
 - Même question pour R et T , sachant que $R = |\underline{r}|^2$.
 - L'onde réfléchie subit-elle un déphasage ? Si oui lequel ?

V. Conclusion : protection de la carte bancaire

La feuille d'aluminium, d'épaisseur a (figure 3), reçoit perpendiculairement à ses faces, une onde électromagnétique incidente de puissance P_i .

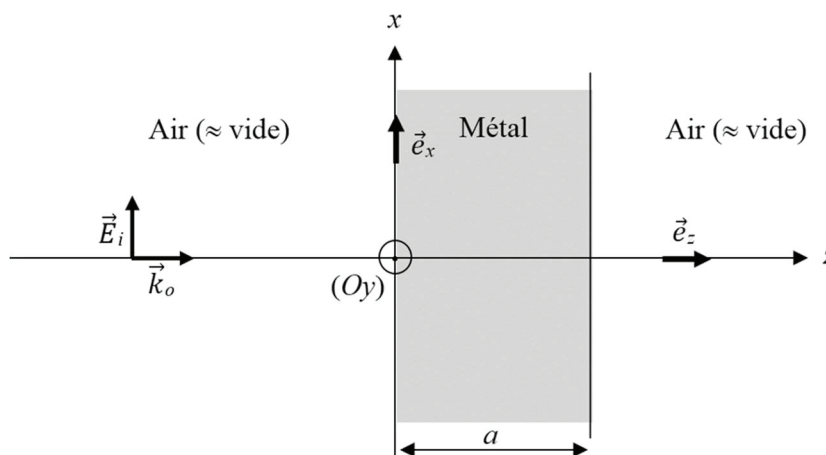


Figure 3

23. Exprimer la puissance P_t transmise après traversée de la feuille métallique (donc pour $z > a$), selon l'axe Oz , en fonction des grandeurs et coefficients P_i , T et A .
24. *Application numérique* : $T = 1,2 \times 10^{-5}$ et $A = 4,5 \times 10^{-5}$. Calculer le rapport $\frac{P_t}{P_i}$. Conclure sur l'opportunité de protéger la carte bancaire par une feuille d'aluminium.

Fin de l'énoncé