CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune à 2 options (Mathématiques et Physique)

MECANIQUE - PARTIE II

Lundi 15 mai : 16 h 15 - 18 h 15

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Une barre {S} homogène, de longueur L et de masse M, est liée par deux anneaux A et B, de masse nulle, aux bras d'une potence (**figure 1**).

- A et B peuvent glisser **sans frottement** le long des bras respectifs.
- La potence est en rotation uniforme à la vitesse $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$ autour de l'axe Z'Z vertical fixe dans le référentiel terrestre $\mathfrak{R}t$ galiléen.

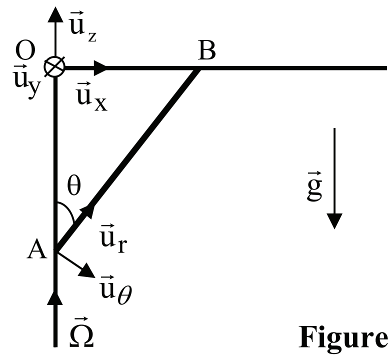


Figure 1

On considère les référentiels suivants :

- $\mathfrak{R}t$: référentiel terrestre galiléen ; $\vec{u}_z$ fixe la verticale ascendante passant par O.
- $\mathfrak{R}p$: référentiel lié à la potence (rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$).
- $\mathfrak{R}$: référentiel lié à la tige (rapporté au repère orthonormé direct $(A, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_y)$).

On s'intéresse à la position d'équilibre relatif de la barre {S} dans $\mathfrak{R}p$ et à la stabilité de cet équilibre.
Tous les vecteurs seront exprimés par leurs composantes dans la base **$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.**

Les données sont : M, L, Ω et g (l'intensité de la pesanteur).

1.1 Force d'inertie d'entraînement dans $\mathfrak{R}p$

À partir de l'expression de la force élémentaire d'inertie d'entraînement ($\overrightarrow{dF_{ie}}$) agissant sur un élément de la barre, déterminer, en fonction de θ et des données :

a. la force totale d'inertie ($\vec{F}_{ie}$) sur la barre dans $\mathfrak{R}p$;

b. le moment en A de ce champ de force d'inertie ;

c. la position du point d'application C de la force d'inertie agissant sur la barre en posant $\overrightarrow{AC} = r_o . \vec{u}_r$ et en déterminant r_o en fonction des données.

1.2 Position d'équilibre dans $\mathfrak{R}p$

On suppose la barre en équilibre relatif dans $\mathfrak{R}p$.

a. Remplir le tableau ci-dessous (à reproduire) avec les expressions littérales des forces et de leur moment en A, explicités dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Action mécanique	Force résultante	Moment en A
Pesanteur		
Contact sans frottement en A		
Contact sans frottement en B		
Inertie		

b. Montrer que la condition d'équilibre se met sous la forme $\sin(2\theta) = \dfrac{D}{\Omega^2}\sin(\theta)$ et expliciter D en fonction des données.

1.3 Recherche des angles d'équilibre

a. Montrer qu'il existe *a priori* 2 angles d'équilibre, θ_{e1} et θ_{e2}, à expliciter en fonction des données.

b. Montrer que l'existence de θ_{e2} implique une inégalité sur Ω par rapport à une vitesse de rotation limite Ω_L à expliciter en fonction des données.

1.4 Énergie potentielle dans $\mathfrak{R}\mathfrak{p}$

Lorsque le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ est constant, on peut associer une énergie potentielle (Ep_{ie}) à la force d'inertie d'entraînement agissant sur la barre dans $\mathfrak{R}\mathfrak{p}$: $Ep_{ie} = -\dfrac{M}{6}\Omega^2 L^2 \sin^2(\theta)$.

Exprimer, en fonction de θ et des données, l'énergie potentielle de pesanteur Ep_{pes} ($Ep_{pes} = 0$ si $\theta = 0$) et en déduire l'énergie potentielle totale $E_p(\theta)$.

1.5 Équilibre dans $\mathfrak{R}\mathfrak{p}$ et stabilité

a. Détermination analytique : retrouver les positions d'équilibre de la barre (obtenues en **1.3a**) par une opération analytique effectuée sur la fonction Ep.

b. Stabilité : ***on se place dans le cas où θ_{e1} et θ_{e2} existent*** (la condition trouvée en **1.3b** est valide).

À l'aide d'une opération analytique effectuée sur la fonction Ep, étudier la stabilité des positions d'équilibre θ_{e1} et θ_{e2}.

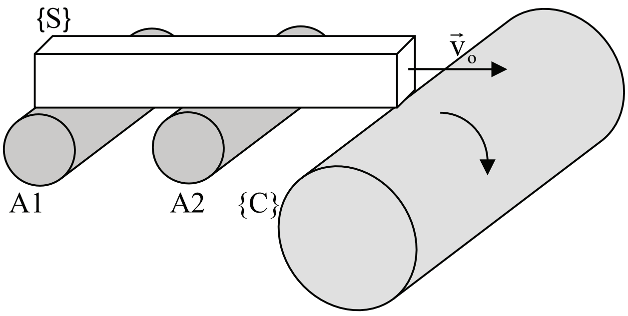
Exercice 2 - Rouleau régulateur

Un tapis roulant permet d'approvisionner une unité de laminage de barres d'acier. Juste avant l'entrée dans le laminoir, on dispose d'un rouleau régulateur pour amener les barres à la vitesse requise.

L'objet {S} à laminer est une barre qui se translate horizontalement en se déplaçant sans frottement sur des appuis A1, A2 et arrive à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0.\vec{u}_x$ sur le rouleau régulateur {C}. L'espacement des appuis est égal à L/2 de telle sorte que, à chaque instant, {S} repose sur 2 appuis seulement.

La **figure 2** (page 4) représente le dispositif à l'instant (t = 0) où {S} arrive sur {C} et quitte l'appui A1.

La **figure 3** (page 4) représente une vue en coupe à la date t = 0, dans le plan vertical passant par le centre de masse G de {S}. La **figure 4** (page 4) représente une vue en coupe à la date t, dans le plan vertical passant par le centre de masse G de {S}.



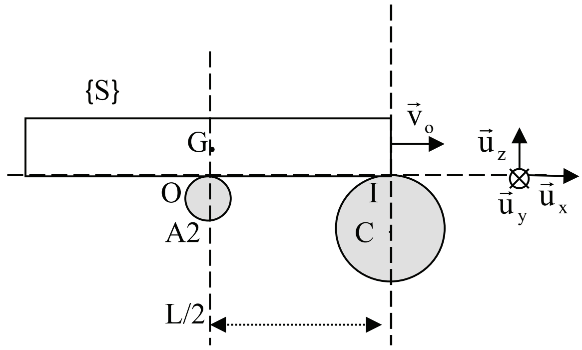


Figure 2

Figure 3

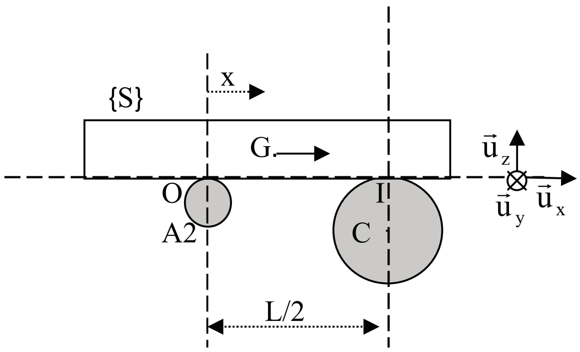


Figure 4

Le mouvement de {S} est étudié dans le référentiel terrestre galiléen $\mathfrak{R}\mathbf{t}$ (rapporté au repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$), $\vec{u}_z$ déterminant la verticale ascendante.

O est le point d'appui de {S} sur A2 dans le plan de coupe et I le point d'appui de {S} sur {C} dans ce même plan.

L'abscisse de G est x. À la date t = 0, x = 0 et la vitesse est $\vec{v}_o = v_o.\vec{u}_x$.

On étudie l'influence de {C} sur le mouvement de {S} avec le modèle mécanique suivant :

- {S} : barre homogène à section carrée (longueur L, coté e, masse M).
- {C} : cylindre homogène (centre C, rayon R) entraîné en rotation autour de son axe de symétrie horizontal fixe dans $\mathfrak{R}\mathbf{t}$ passant par le centre C, à la vitesse de rotation constante $\vec{\Omega} = \Omega.\vec{u}_y$.

  L'interaction entre {C} et {S} génère des frottements de glissement solide obéissant aux lois de Coulomb, le coefficient de frottement dynamique étant f.
- {A2} : rouleau d'appui ; son seul rôle est un guidage horizontal ; il n'y a aucun frottement à son niveau : la réaction d'appui sur {S} en O est dans la direction $\vec{u}_z$.
- On néglige l'action de l'air sur {S}.

Les données sont : M, v_o, L, e, f, R, Ω et g (l'intensité de la pesanteur). Les valeurs sont telles que $\frac{ef}{L} < 1$.

2.1 **a.** Déterminer la vitesse de glissement $\vec{v}_{gl}$ de {S} sur {C} à la date t.

b. Expliquer pourquoi le mouvement de {S} débute par une phase de glissement sur {C} si v_o est différent de $v_L = \Omega R$. Quelle est la nature du mouvement si $v_o = v_L$?

c. Rappeler les lois de Coulomb relatives au frottement solide.

d. Déterminer le moment cinétique $\vec{L}_G$ de {S} en G dans $\mathfrak{R}t$ puis le moment cinétique $\vec{L}_O$ en O.

2.2 Cas où $v_o < \Omega R$

a. Analyse

- Faire une analyse des actions mécaniques agissant sur {S} et les représenter sur un schéma soigné (en particulier, représenter l'action tangentielle en I de {C} sur {S} avec son sens réel).
- Écrire les deux théorèmes de la dynamique permettant d'étudier le mouvement de {S}. (Il est conseillé d'écrire le théorème du moment cinétique en O).
- En déduire trois équations indépendantes.
- À partir des trois équations précédentes et des lois de Coulomb, montrer que l'équation différentielle du mouvement pendant la phase de glissement est : $\ddot{x} = \dfrac{2fgx}{L + ef}$.

b. Loi du mouvement

- Résoudre l'équation précédente $\ddot{x}$ et expliciter x en fonction du temps t et des données.
- Expliciter la vitesse v en fonction de t et des données.

c. Mouvement ultérieur

- Déterminer l'équation permettant de trouver la date t_o terminant la phase de glissement.
- Décrire le mouvement ultérieur (en supposant qu'il s'établisse) et écrire les équations horaires de x et de la vitesse v en fonction de t_o et des données.

d. Synthèse

Représenter graphiquement l'abscisse x et la vitesse v en fonction du temps pour t > 0 (ces graphes devront être soignés. Veiller à représenter correctement le raccordement entre les 2 phases du mouvement).

2.3 Cas où $v_o > \Omega R$

a. En procédant comme en **2.2.a**, trouver l'équation différentielle du mouvement de la phase de glissement dans ce cas.

b. Reprendre dans ces conditions exactement les mêmes questions qu'en **2.2.b**, **2.2.c** et **2.2.d**.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 17 1380 – D'après documents fournis