CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune aux 3 options (Mathématiques, Physique, Chimie)

MECANIQUE - PARTIE I

Lundi 15 mai : 14 h - 16 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 - Modélisation du comportement d'un buggy

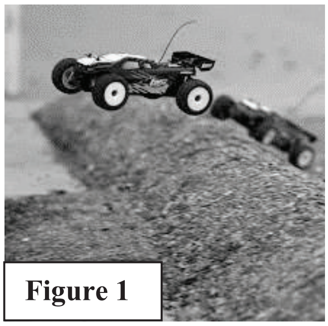
Figure 1

On cherche à étudier le mouvement d'un buggy se déplaçant sur une piste curviligne (**figure 1**).
À chaque point de la piste, on associe un vecteur unitaire tangent ($\vec{u}$) et normal ($\vec{n}$) (**figure 2**).

On peut, en première approche, comprendre le comportement d'un véhicule se déplaçant à la vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u}$ $(v > 0)$ en considérant que la piste exerce sur la roue motrice :
- une force normale $\vec{N} = N\vec{n}$ avec $N > 0$, $\vec{n}$ étant la normale sortante de la piste (**figure 2**) ;
- une force tangentielle $\vec{T} = T\,\vec{u}$.

Selon la vitesse d'avancement du véhicule :
- si $\vec{T}.\vec{v} > 0$, la force $\vec{T}$ est motrice (le moteur est sollicité) ;
- si $\vec{T}.\vec{v} < 0$, la force $\vec{T}$ est résistante (freinage).

Dans toute la suite, on adopte le modèle suivant :
- le buggy sera considéré comme un objet ponctuel M, de masse m, soumis uniquement à la pesanteur et à l'action de la piste (se ramenant aux forces $\vec{T}$ et $\vec{N}$ décrites plus haut) ;
- M se déplace sur la piste représentée **figure 2** : cette piste est contenue dans le plan XAZ du repère terrestre (A, $\vec{u}_x$, $\vec{u}_z$), $\vec{u}_x$ étant horizontal et $\vec{u}_z$ étant la verticale ascendante ;
- la vitesse $\vec{v}$ conserve un module v constant tout au long du trajet.

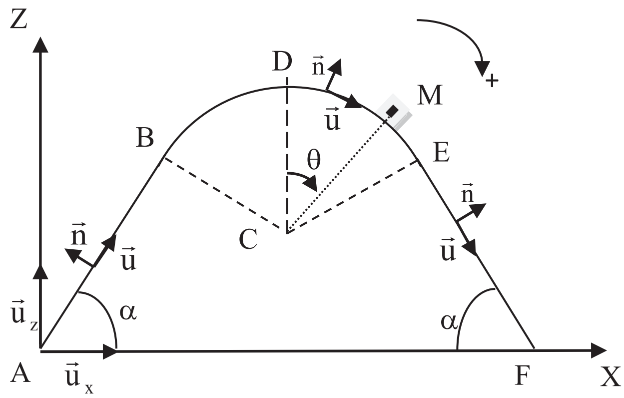

Figure 2

AB : portion rectiligne, de longueur L, inclinée de α par rapport à AX.

BDE : arc de cercle de rayon R et de centre C.

EF : portion rectiligne, de longueur L, inclinée de α.

Les portions AB et EF se raccordent tangentiellement à l'arc de cercle BDE.

Les points B et E ont même cote ($z_B = z_E$).

Les données sont : m, L, l'intensité de la pesanteur g, le rayon R et α.

1.1 Montrer que l'angle BCD est égal à α.
Déterminer littéralement les coordonnées des différents points en remplissant le tableau ci-dessous (à reproduire).

Point	B	D	E	F
Abscisse x				
Cote z				

1.2 **Étude du trajet AB** : donner les expressions littérales de N et de T.

1.3 **Étude du trajet EF** : donner les expressions littérales de N et de T.

1.4 **Étude du trajet sur la portion circulaire BDE**

On repère la position de M par l'angle orienté θ.

a. Exprimer littéralement N et T en fonction de θ, v et des données.

b. Représenter graphiquement N et T en fonction de θ dans son domaine de définition.

c. Trouver une inégalité sur la vitesse v pour que M ne quitte jamais la piste (on fera intervenir une vitesse limite V_{lim} dont on donnera l'expression en fonction des données).

1.5 **Travail de $\vec{T}$**

Remplir le tableau ci-dessous (à reproduire) donnant l'expression littérale du travail W de la force $\vec{T}$ et sa qualité (motrice ou résistante) sur les portions successives de la piste, puis sur la totalité du trajet AF :

Trajet	AB	BD	DE	EF	AF
W ($\vec{T}$)					
Qualité					

1.6 **Amélioration du modèle**

On prend en compte la résistance de l'air sur le mobile par une force $\vec{F}_a$.

$\vec{F}_a$ est de direction tangentielle à la piste, de sens opposé à $\vec{v}$. Puisque le module de $\vec{v}$ est constant, celui de $\vec{F}_a$ l'est également. On cherche à évaluer le travail de $\vec{T}$ par le théorème de l'énergie mécanique.

a. – Montrer en 2 lignes au maximum que, dans ce cas, T se déduit des expressions trouvées en **1.2**, **1.3** et **1.4** par ajout de F_a.
- Montrer que T suit une loi affine de x sur le trajet BDE.
- Représenter graphiquement T en fonction de x sur le trajet AF.

b. Énoncer précisément le théorème de l'énergie mécanique (classer les forces agissant sur le mobile en force conservative et non conservative).

c. Reproduire le tableau ci-dessous et le compléter avec les expressions littérales :

Trajet	AD	DF	AF
Variation d'énergie mécanique ΔE_m			
Travail de $\vec{F}_a$: W($\vec{F}_a$)			
Travail de $\vec{T}$: W($\vec{T}$)			

Exercice 2 - Dimensionnement d'une cloche d'obturation

Une cloche obture un tuyau de vidange par l'intermédiaire d'un joint d'étanchéité (**figure 3**).
Une tige, de masse totale m, permet d'actionner la vidange.

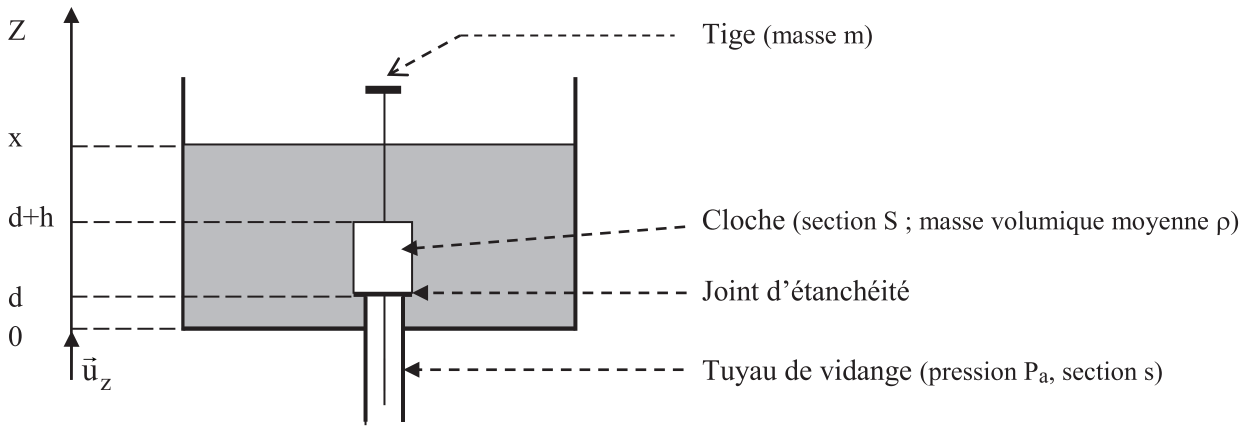

Figure 3

- La cloche, de forme cylindrique (hauteur h, section droite S) a une masse volumique moyenne ρ. Un dispositif de guidage (non représenté sur la figure) maintient la base du cylindre horizontale et assure un guidage vertical en translation.
- Cette cloche plonge dans un réservoir rempli d'eau sur une hauteur x. L'eau sera considérée comme un fluide incompressible de masse volumique $\rho_e > \rho$.
- On suppose que la cloche, posée sur le tuyau de vidange, est immobile.
- L'air contenu dans le tuyau de vidange, de même que l'air situé au-dessus de l'eau du réservoir, est à la pression atmosphérique uniforme P_a.
- Le tuyau de vidange, de section droite s < S, pénètre dans le réservoir sur une hauteur d.

On veut étudier la force $\overrightarrow{R_n} = R_n \vec{u}_z$ exercée par le tuyau sur le joint de la cloche ($\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire vertical ascendant).

Les données sont : S, s, m, h, d, ρ_e, ρ, P_a et g (l'intensité de la pesanteur).

2.1 Statique des fluides

a. Tous les fluides étant immobiles, déterminer la pression en un point M de l'eau du réservoir à la cote z (z < x) en fonction de z, x, P_a, g et ρ_e.

b. Énoncer complètement le théorème d'Archimède et expliquer, en 5 lignes maximum, pourquoi on ne peut pas l'utiliser ici pour déterminer la résultante des forces de pression sur la cloche.

c. Expliquer, sans calcul, pourquoi la résultante des forces de pression sur les parois latérales de la cloche est nulle.

d. La résultante des forces de pression ($\overrightarrow{F_p}$) sur l'ensemble {cloche + tige} se ramène au calcul de la somme des forces pressantes sur les bases inférieures et supérieures de la cloche, c'est-à-dire en négligeant les forces pressantes sur la tige : $\overrightarrow{F_p} = F_z \vec{u}_z$ (F_z sera explicitée lors des questions suivantes). Trouver la relation donnant R_n en fonction de F_z et des données.

2.2 Évaluation de R_n si $d < x < d + h$

Consigne : *dans toute la suite, écrire* R_n *sous la forme* $R_n = A + B(x - d)$, A *et* B *étant des grandeurs algébriques indépendantes de x à expliciter en fonction des données.*

Rappel : la force pressante élémentaire $\overrightarrow{dF}$ agissant sur la surface élémentaire dS est : $\overrightarrow{dF} = P.dS\,\vec{n}$, P étant la pression régnant sur dS et $\vec{n}$ la normale à l'élément de surface, orientée du fluide vers la paroi.

- **a.** Évaluer la résultante des forces pressantes en $z = d$ puis en $z = d + h$.
- **b.** En déduire F_z puis R_n sous la forme $R_n = A_1 + B_1(x - d)$.

2.3 Évaluation de R_n si $x > d + h$

Donner l'expression de R_n dans ce cas, avec R_n sous la forme $R_n = A_2 + B_2(x-d)$.

2.4 Synthèse : étude de R_n en fonction de x

- **a.** À partir des expressions obtenues en **2.2** et **2.3**, représenter graphiquement R_n en fonction de x pour $x > d$.
- **b.** Rechercher le minimum de R_n (R_{min}) et la valeur de x correspondante.

2.5 Condition d'étanchéité

Pour l'étanchéité du joint, on veut que la valeur de R_n soit ***toujours*** supérieure au produit mg.

Donner une inégalité sur le rapport $\frac{s}{S}$ pour qu'il en soit ainsi.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 17 1379 – D'après documents fournis